

2025.5.27

武田 利一様

おいそがしい日々をすごされていると思います。お体に気をつけて下さい。

Googleで「常用対数表 作る」を調べました。

「常用対数表を用いた授業実践」(数研出版)が目にとまりました。 2^{29} について考えるきっかけを作っていただきました。

常用対数は四捨五入した概数であることに留意することで累乗計算においての誤差についても考えることができました。ありがとうございます。

故きを温ねて新しきを知る - 古いことを研究すると新しいことがよりよくわかる。数学の歴史を研究することから学ぶことは多いと思います。

林 邦英

2025. 5. 27

2の29乗を求める - 4桁常用対数表を使って

① $\log_{10} 2 = 0.3010$ $\log_{10} 4 = 0.6021$ $\log_{10} 8 = 0.9031$ をくらべてみました。 $4 = 2^2$ $8 = 2^3$ なのに $\log_{10} 2$ の倍数にはなっていません。

$\log_{10} 2 = 0.3010$ □ □ を使えないかと思いました。 $29 = 3 \times 9 + 2$ に分解し $\log_{10} 8 \times 9 + \log_{10} 4 = 8.7300$ としました。

② $2^{10} = 1.024 \times 10^3$ が使えないかと考えました。

$\log_{10} 1.02 = 0.0086$ $\log_{10} 1.03 = 0.0128$ を使って $\log_{10} 1.024$ を求め $\log_{10} 1024 = 3.01028$ $\log_{10} 2 = 0.301028$ とするものです。

2^{29} を 4桁常用対数表を使って求めます。 $\log_{10} 2 = 0.3010$ を使います。 $0.3010 \times 29 = 8.7290 = 8 + 0.7290$ 7290 を表でさがすと 5.36 7292 がみつかりました。 $2^{29} \doteq 5.36 \times 10^8$ としました。

12桁の電卓を使って $2 \times \dots \times \dots \times 2 = 536870912$

5.37×10^8 であることがわかります。 5.36×10^8 の精度は良いのか悪いのか。

$$0.3010 < \frac{0.30095}{0.30105} \quad 0.30095 \leq \log_{10} 2 < 0.30105$$

$$0.30095 \times 29 = 8.72755 \quad \rightarrow \quad 5.34 \quad 7275$$

$$0.30105 \times 29 = 8.73045 \quad \rightarrow \quad 5.38 \quad 7308$$

$$5.34 \times 10^8 < 2^{29} < 5.38 \times 10^8$$

常用対数表は四捨五入した概数なので上限と下限を調べました。

③ 2の累乗の数値を使います。

$$\textcircled{2} \quad 0.3010 \quad \begin{array}{l} 0.30095 \\ 0.30105 \end{array} \div 1 \quad \begin{array}{l} 0.30095 \\ 0.30105 \end{array}$$

$$\textcircled{4} \quad 0.6021 \quad \begin{array}{l} 0.60205 \\ 0.60215 \end{array} \div 2 \quad \begin{array}{l} 0.301025 \\ 0.301075 \end{array} \quad \circ$$

$$\textcircled{8} \quad 0.9031 \quad \begin{array}{l} 0.90305 \\ 0.90315 \end{array} \div 3 \quad \begin{array}{l} 0.30101\bar{6} \\ 0.30105 \end{array}$$

$$\textcircled{16} \quad 1.2041 \quad \begin{array}{l} 1.20405 \\ 1.20415 \end{array} \div 4 \quad \begin{array}{l} 0.3010125 \\ 0.3010375 \end{array}$$

$$\textcircled{32} \quad 1.5051 \quad \begin{array}{l} 1.50505 \\ 1.50515 \end{array} \div 5 \quad \begin{array}{l} 0.30101 \\ 0.30103 \end{array} \quad \textcircled{\circ}$$

$$\textcircled{64} \quad 1.8062 \quad \begin{array}{l} 1.80615 \\ 1.80625 \end{array} \div 6 \quad \begin{array}{l} 0.301025 \\ 0.301041\bar{6} \end{array} \quad \circ$$

上段の最大 0.301025 と下段の最小 0.30103 を使います。

$$0.301025 \times 29 = 8.729725 \quad \begin{array}{l} (536692) \\ (7297316 - 53670) \end{array}$$

$$0.301030 \times 29 = 8.729870 \quad \begin{array}{l} (811-8 \quad 8-65) \\ (7298691 - 53687) \\ (536871) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5.36 - 7292 \quad 5.37 - 7300 \quad () \text{は7桁対数表} \\ (7291648) \quad (7299743) \end{array}$$

$$5.25 \div 8 = 0.65625 \quad 6.70 \div 8 = 0.8375 \quad \begin{array}{l} \nearrow \\ \text{7桁では} \\ \frac{7052}{8095} = 0.8711 \end{array}$$

$$5.366 < 2^{29} < 5.369 \quad \text{(注)}$$

(注) 0.301030の精度が良いことが真数よりも小さくなった原因だと思えます。4桁の5.36と5.37を使った補間には限界がありました。7桁では問題はありませんでした。精度が良くて計算誤差が問題となった事例を紹介します。 → 続く

$$\log_{10} 7 \doteq 431 \div 510 + 0.00000093762 \div 510 \div 2.3 =$$

2025. 5. 27

①の考え方は有効か？

P.2 ③の表を使います。

②だけでは $0.30105 - 0.30095 = 0.0001$

④⑧も使うと $0.30105 - 0.301025 = 0.000025$

全部を使うと $0.30103 - 0.301025 = 0.000005$

$\frac{1}{4}$
 $\frac{1}{5}$

$\log_{10} 2 = 0.3010$ の誤差の範囲を小さくすることができました。

②の考え方の弱点は？

$$(\log_{10} 1.02 = 0.00860017)$$

$$\log_{10} 1.02 = 0.0086 < \frac{0.00855}{0.00865} \text{ 誤差の大きさは } 0.0001$$

です。÷10を行いますので 0.00001 となります。

$$0.301028 < \frac{0.301023}{0.301033} \quad 2^{29} \text{ は } \begin{matrix} 5.365 \\ 5.370 \end{matrix}$$

$$2^{100} \doteq 1.26765 \times 10^{30} \text{ を使うと } \div 100 \text{ を行なうので}$$

$$0.3010300 < \frac{0.3010295}{0.3010305} \text{ となりました。}$$

もっとよい考え方があると思います。知っていたら教えて下さい。

土日も部活動とあります。おいそがしい中 お返事を書いていただき

ありがとうございます。お体に気をつけて下さい。

(注)の続き $\sqrt[510]{6 \times 10^{25}}$ を8桁と12桁の電卓で行いました。2.3補正法を $\log_{10} 7$ でもためそうとしました。8桁では 0.99999904 と 1より小さくなってしまいました。
 $431 \div 510 = 0.84509803921$ で $\log_{10} 7 = 0.84509804001426$ より小さいのに変だ
 と思いました。後で12桁で計算したら 1.00000093762 となり補正を行なうことができました。↑

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P.P.
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	43
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	42
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	41
13	1130	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	39
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	38
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	37
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	36
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	35
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	34
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	33
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	32
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	31
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	30
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3765	3784	29
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	28
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	27
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	26
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	25
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	24
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	23
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	22
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	21
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	20
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	19
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	18
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	17
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	16
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	15
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	14
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	13
40	6021	6032	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	12
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	11
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	10
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	29
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	28
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	27
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	26
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	25
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	24
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	23
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	22
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	21
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	20
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	19

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P.P.
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	26
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	25
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	24
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	23
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	22
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	21
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	20
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	19
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	18
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	17
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	16
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	15
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8305	8312	8319	14
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	13
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	12
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	11
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	10
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	9
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	29
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	28
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	27
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	26
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	25
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	24
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	23
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	22
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	21
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	20
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	19
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	18
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	17
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	16
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	15
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	14
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	13
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	12
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	11
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	10
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	9
94	9731	9735	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	29
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	28
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	27
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	26
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9937	9943	9948	9952	25
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	24

こは切り上げと切り捨て