春を感じます。おいそがしい日々をすごされていると思います。お体に気をつけて下さい。

「1÷N（Nは1から100の自然数）の表」の観察を始めたのは25年前のことです。

通信制の高校にかよう友人の質問「割り切れるときはどういう場合の時ですか？」

から始まりました。「Nの成分が2と5の場合にだけ割り切れます。」

いとも簡単な答でした。

素数の場合の循環節の長さが N−1 の約数になるのがふしぎでした。

$1\div37=0.\dot{0}2\dot{7}$　　$1\div41=0.\dot{0}243\dot{9}$

$2+7=9$　　$2+4+3+9=18 \rightarrow 1+8=9$

$1\div7=0.\dot{1}4285\dot{7}$　6つの数をくり返す理由は計算のと中のあまりの数が 1.2.3.4.5.6 の6つしかないことによって説明できることを知ったこともおどろきでした。　$1\div7^2$　$1\div7^3$ の場合の循環節の長さが $6\times7=42$（桁），$6\times7\times7=294$（桁）になるのは今でもふしぎです。

①10進法以外の進法の場合はどうなのか調べました。

②剰余数列の場合の一般的な規則はあるのか

③ 1/N を求める計算方法

この3点に着目しました。

もしよろしければ、御意見をお知らせ下さい。

1÷N（Nは7の倍数）の表を使って観察しました。Nの3の成分が気になり

1÷7，1÷7÷3 (21)，1÷7÷9 (63)，1÷7÷27 (189) の2分割和と3分割和を調べました。

	[2分割和]	[3分割和]
1÷7	142+857＝999	14+28+57＝99
1÷21	047+619＝666	04+76+19＝99
1÷63	015+873＝888	01+58+73＝132 (33)
1÷189	005+291＝296	00+52+91＝143 (44)

$1\div27=0.\dot{0}3\dot{7}$　$8\div27=0.\dot{2}9\dot{6}$

9がならぶ	9	9
9以外の数字がならぶ	6 8	9 3
A÷27の循環節になる	296	4

1÷7÷81 (567) の場合も調べました。

$0.\dot{0}0176366843033509\dot{7}$　　7→6, 81→9 → 18桁

```
  001763668
+ 430335097
  432098765
```

```
  001763
  668430
+ 335097
 1005290
  005291
```

35÷81

1÷7÷27 (189)

$1 \div N$（Nは7の倍数）について

$1 \div 7 = 0.\dot{1}4285\dot{7}$　　$142+857=999$　$14+28+57=99$

$1 \div 14 = 0.0\dot{7}1428\dot{5}$　　$14 = 2 \times 7$　　$0 + \dot{7}1428\dot{5}$
(1)　(6)

$1 \div 21 = 0.\dot{0}4761\dot{9}$　　$21 = 3 \times 7$　　$047+619=666$　$04+76+19=99$

$1 \div 28 = 0.03\dot{5}7142\dot{8}$　　$28 = 2 \times 2 \times 7$　　$03 + \dot{5}7142\dot{8}$
(2)　(6)

$1 \div 35 = 0.0\dot{2}8571\dot{4}$　　$35 = 5 \times 7$　　$0 + \dot{2}8571\dot{4}$
(1)　(6)

$1 \div 42 = 0.0\dot{2}3809\dot{5}$　　$42 = 2 \times 3 \times 7$　　$0 + \dot{2}3809\dot{5}$
(1)　(6)

$238+095=333$　$23+80+95=198$
(99)

$1 \div 49 = 0.\dot{0}20408163265306122448$
$979591836734693877551\dot{1}$　　$49 = 7 \times 7$
(42)

$1 \div 56 = 0.017\dot{8}5714\dot{2}$　　$56 = 2^3 \times 7$　　$017 + \dot{8}5714\dot{2}$
(3)　(6)

$1 \div 63 = 0.\dot{0}1587\dot{3}$　　$63 = 3 \times 3 \times 7$　　$015+873=888$　$01+58+73=132$
(33)

$1 \div 70 = 0.0\dot{1}4285\dot{7}$　　$70 = 2 \times 5 \times 7$　　$0 + \dot{1}4285\dot{7}$
(1)　(6)

$1 \div 77 = 0.012987$　　$77 = 7 \times 11$　　$012+987=999$　$01+29+87=117$
$1 \div 11 = 0.\dot{0}\dot{9}$　$2 \div 11 = 0.\dot{1}\dot{8}$　(18)

$1 \div 84 = 0.01\dot{1}9047\dot{6}$　　$84 = 2^2 \times 3 \times 7$　　$01 + \dot{1}9047\dot{6}$
(2)　(6)
$190+476=666$　$19+04+76=99$

$1 \div 91 = 0.\dot{0}1098\dot{9}$　　$91 = 7 \times 13$　　$010+989=999$　$01+09+89=99$
$1 \div 13 = 0.\dot{0}7692\dot{3}$　(6)

$1 \div 98 = 1 \div 49 \div 2$　　$98 = 2 \times 7^2$　　(1)　(42)

$1 \div 105 = 0.0\dot{0}9523\dot{8}$　　$105 = 3 \times 7 \times 5$　　$0 + \dot{0}9523\dot{8}$
$095+238=333$　$09+52+38=99$

$1 \div 112 = 0.0089\dot{2}8571\dot{4}$　　$112 = 2^4 \times 7$　　$0089 + \dot{2}8571\dot{4}$
(4)　(6)

$1 \div 119 = 0.\dot{0}0840336134453781512605$
$+\ 042016806722689075630252\dot{1}$　　$119 = 7 \times 17$
(48)
[2分割和]　428571428571428571428571　　$48 \div 2 = 24 = 6 \times 4$
$3 \div 7 = 0.\dot{4}2857\dot{1}$　(6)

[3分割和]
0084033613445378
1512605042016806
$+\ 7226890756302521$
8823529411764705　　$48 \div 3 = 16$
$15 \div 17 = 0.\dot{8}82352941176470\dot{5}$
(16)

$1 \div 126 = 0.0\dot{0}7936\dot{5}$　　$126 = 2 \times 3^2 \times 7$　　$0 + \dot{0}7936\dot{5}$
(1)　(6)
$079+365=444$　$07+93+65=165$
(66)

$1 \div 133 = 0.007518796$　　$133 = 7 \times 19$　　(18)
$+\ 992481203$
[2分割和]　999999999　　$18 \div 2 = 9$
$1 \div 19 = 0.\dot{0}5263157894736842\dot{1}$
(18)

007518
796992
$+\ 481203$
[3分割和]　1285713　　$18 \div 3 = 6$

$2 \div 7 = 0.\dot{2}8571\dot{4}$

$1 \div 140 = 0.00\dot{7}1428\dot{5}$　　$140 = 2^2 \times 5 \times 7$　　$00 + \dot{7}1428\dot{5}$
(2)　(6)

$1 \div 7 \div 3$
3の成分が1つの時は　2分割和は9にならなくても3分割和では9になる。
$1 \div 7 \div 9$
3の成分が2つの時は　2分割和も3分割も9にならない。
3の成分が3つの時は
$8 \div 27 = 0.\dot{2}9\dot{6}$　　(44)
$1 \div 7 \div 27 = 0.\dot{0}0529\dot{1}$　　$005+291=296$　　$00+52+91=143$

10進法

1÷N (Nは1から25)の表

$10=2\times5$
$10-1=9=3\times3$

N	1/N		固定部 + 循環部
1	1		0 + 0
2	0.5		1 + 0
3	$0.\dot{3}$		0 + 1
4	0.25		2 + 0
5	0.2		1 + 0
6	$0.1\dot{6}$		1 + 1
7	$0.\dot{1}4285\dot{7}$	142+857=999 14+28+57=99	0 + 6
8	0.125		3 + 0
9	$0.\dot{1}$		0 + 1
10	0.1		1 + 0
11	$0.\dot{0}\dot{9}$		0 + 2
12	$0.08\dot{3}$	(13−1)÷2=6	2 + 1
13	$0.\dot{0}7692\dot{3}$	$2\div13=0.\dot{1}5384\dot{6}$	0 + 6
14	$0.0\dot{7}1428\dot{5}$	14=2×7	1 + 6
15	$0.0\dot{6}$		1 + 1
16	0.0625		4 + 0
17	$0.\dot{0}58823529411764\dot{7}$		0 + 16
18	$0.0\dot{5}$		1 + 1
19	$0.\dot{0}5263157894736842\dot{1}$		0 + 18
20	0.05		2 + 0
21	$0.\dot{0}4761\dot{9}$	047+619=666 04+76+19=99	0 + 6
22	$0.0\dot{4}\dot{5}$		1 + 2
23	$0.\dot{0}43478260869565217391\dot{3}$		0 + 22
24	$0.041\dot{6}$		3 + 1
25	0.04		2 + 0

1÷N (Nは1から25)の表の観察

10進法の性質

① $10=2\times5$　Nの成分が2と5だけの時には割り切れる。

② $10+1=11$　11の循環節は2桁になる。

③ $10-1=9=3\times3$　(ア) 3と9の循環節は1桁になる。

(イ) Nの成分に3を含むと変則形になる。

①について

N		1/N	固定部 + 循環部
N = 2	$=2^1$	0.5	1 + 0
N = 4	$=2^2$	0.25	2 + 0
N = 8	$=2^3$	0.125	3 + 0
N = 16	$=2^4$	0.0625	4 + 0
N = 6	$=2\times3$	$0.1\dot{6}$	1 + 1
N = 12	$=2^2\times3$	$0.08\dot{3}$	2 + 1
N = 24	$=2^3\times3$	$0.041\dot{6}$	3 + 1

③の(イ)について

N = 7　$0.\dot{1}4285\dot{7}$　142+857 = 999
14+28+57 = 99

N = 21　$0.\dot{0}4761\dot{9}$　047+619 = 666
21=7×3　04+76+19 = 99

1÷N（Nは7の倍数・7の累乗）の表

1÷N　Nは7の倍数

1÷7	$= 0.\dot{1}4285\dot{7}$	1÷77	$= 0.\dot{0}1298\dot{7}$
1÷14	$= 0.0\dot{7}1428\dot{5}$	1÷84	$= 0.01\dot{1}9047\dot{6}$
1÷21	$= 0.\dot{0}4761\dot{9}$	1÷91	$= 0.\dot{0}1098\dot{9}$
1÷28	$= 0.03\dot{5}7142\dot{8}$	$\boxed{1÷98 =}$	（1÷49÷2）
1÷35	$= 0.0\dot{2}8571\dot{4}$	1÷105	$= 0.0\dot{0}9523\dot{8}$
1÷42	$= 0.0\dot{2}3809\dot{5}$	1÷112	$= 0.0089\dot{2}8571\dot{4}$
$\boxed{1÷49 =}$		1÷119	$= 0.\dot{0}0840336134453781512605042016806722689075630252\dot{1}$
1÷56	$= 0.017\dot{8}5714\dot{2}$	1÷126	$= 0.0\dot{0}7936\dot{5}$
1÷63	$= 0.\dot{0}1587\dot{3}$	1÷133	$= 0.\dot{0}0751879699248120\dot{3}$
1÷70	$= 0.0\dot{1}4285\dot{7}$	1÷140	$= 0.00\dot{7}1428\dot{5}$

1÷N　Nは7の累乗

$1÷7^2$ [=49] = $0.\dot{0}20408163265306122448$
979591836734693877551$\dot{}$ （42桁）

$1÷7^3$ [=343] = （294桁）

0.00291 54518 95043 73177 84256 55976 67638 48396 50
14577 25947 52186 58892 12827 98833 81924 19825 07
28862 97376 09329 44606 41399 41690 96209 91253 64
43148 68804 66472 30320 6
9970 84548 10495 62682 21
57434 40233 23615 16034 98542 27405 24781 34110 78
71720 11661 80758 01749 27113 70262 39067 05539 35
86005 83090 37900 87463 55685 13119 53352 76967 93

A÷41（Aは1から40）の観察

1÷13 = $0.\dot{0}7692\dot{3}$　　076 + 923 = 999

2÷13 = $0.\dot{1}5384\dot{6}$　　153 + 846 = 999

3÷13 = $0.\dot{2}3076\dot{9}$

4÷13 = $0.\dot{3}0769\dot{2}$　　(13−1)÷2 = 6

5÷13 = $0.\dot{3}8461\dot{5}$

1÷13の循環節は6桁になり数字のパターンは2種類ある。

1÷37 = $0.\dot{0}2\dot{7}$　　(37−1)÷3 = 12

1÷41 = $0.\dot{0}243\dot{9}$　　(41−1)÷5 = 8

02439	1	10	16	18	37
04878	2	20	32	33	36
07317	3	7	13	29	30
09756	4	23	25	31	40
12195	5	8	9	21	39
14634	6	14	17	19	26
26829	11	12	28	34	38
36585	15	22	24	27	35

A÷41（Aは1から40）は8つのグループに分けることができる。

0+2+4+3+9 = 18 = 9×2 ⟷ 1+10+16+18+37 = 82 = 41×2

1÷299の循環節の分割和でわかること

299 = 13 × 23

$1 \div 13 = 0.\dot{0}7692\dot{3}$　　循環節は6桁　$(13-1) \div 2 = 6$

$1 \div 23 = 0.\dot{0}434782608695652173913\dot{}$ 　　循環節は22桁　23−1=22

6と22の最小公倍数は66　　1÷299の循環節は66桁

1÷299 = 0.0033444816053511705685
　　　6187290969899665551839
　　　4648829431438127090301

2分割和　　66 ÷ 2 = 33　　9がならぶ。

3分割和　　66 ÷ 3 = 22　　2÷23の循環節になる。

6分割和　　66 ÷ 6 = 11　　9がならぶ。

11分割和　　66 ÷ 11 = 6

$\underset{=}{5}$ 384610 となるのを補正する。

384615　7桁を6桁にする。

0.384615 × 13 = 4.999995　≒ 5

5 ÷ 13 = 0.384615384　（10桁の電卓を使用）

$5 \div 13 = 0.\dot{3}8461\dot{5}$　　5÷13の循環節になる。

1÷N（Nは合成数の場合）の成分の抽出をする場合に分割和を使うことができる。

循環節の分割和の補正について

$1 \div 121 = 0.\dot{0}082644628099173553719\dot{}$　　22桁

$1 \div 11 = 0.\dot{0}\dot{9}$　　2桁

M=10（10進法）

N=121	00	82	64
	82	64	46
l=22	64	46	28
	46	28	09
d=11	28	09	91
	09	91	73
ld=2	91	73	55
	73	55	37
	55	37	19
	37	19	00
	+ 19	00	82
	5 09	09	04
	09	09	09

121 (N) = 11 × 11 ⟶ 2 × 11 = 22 (l)

22 ÷ 11 (d) = 2 (ld)

$1 \div 11 = 0.\dot{0}\dot{9}$

〈分割和〉⟷〈循環小数をずらして加える〉

電卓を使って計算のと中のあまりを求める方法

N÷23 の表（部分）

		順番			順番
1÷23 =	0.04347	0	12÷23 =	0.52173	14
2	0.08695	8	13	0.56521	12
3	0.13043	20	14	0.60869	7
4	0.17391	16	15	0.65217	13
5	0.21739	15	16	0.69565	10
6	0.26086	6	17	0.73913	17
7	0.30434	21	18	0.78260	4
8	0.34782	2	19	0.82608	5
9	0.39130	18	20	0.86956	9
10	0.43478	1	21	0.91304	19
11	0.47826	3	22	0.95652	11

順番は 0から始めます。 $\boxed{0}$番の 0.04347 の小数点を1つ右にずらした 0.4347 をさがし $\boxed{1}$番とします。 $\boxed{2}$番は、10÷23 0.43478 の小数点を1つ右にずらした小数部分 0.3478 になります。 8÷23 が $\boxed{2}$番になります。$\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ と順々に求めてゆきます。

$1 \div 23 = 0.\dot{0}434782608695652173 91\dot{3}$

計算のと中のあまりの順番

$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$
1	10	8	11	18	19	6
$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$	$\boxed{10}$	$\boxed{11}$	$\boxed{12}$	$\boxed{13}$
14	2	20	16	22	13	15
$\boxed{14}$	$\boxed{15}$	$\boxed{16}$	$\boxed{17}$	$\boxed{18}$	$\boxed{19}$	$\boxed{20}$
12	5	4	17	9	21	3
$\boxed{21}$	$\boxed{22}$					
7	1					

計算のと中のあまりの順番を使って

$\boxed{2} + \boxed{8} = \boxed{10}$
$8 \times 2 = 16$

$\boxed{2} + \boxed{6} = \boxed{8}$
$8 \times 6 = 48 = 23 \times 2 + 2$

$\boxed{15} + \boxed{16} = \boxed{31} = 22 \times 1 + \boxed{9}$
$5 \times 4 = 20$

$\boxed{10} + \boxed{10} = \boxed{20}$
$16 \times 16 = 256 = 23 \times 11 + 3$

電卓で有効桁数以上の商を求める方法

電卓を使った尺取虫法　（10桁の場合）

$1 \div 23 = 0.0434\underline{782}6$

$\underline{782} \times 23 = 17986$

$1000 - 986 = \underline{14}$

$\underline{14} \div 23 = 0.60869\underline{565}2$

$\underline{565} \times 23 = 12995$

$1000 - 995 = \underline{5}$

$\underline{5} \div 23 = 0.21739\underline{130}4$

$\underline{130} \times 23 = 2990$

$1000 - 990 = \underline{10}$

$\underline{10} \div 23 = 0.434782608$

$\underline{913} \times 23 = 20999$

$1000 - 999 = \boxed{1}$

同じ数字列が出てきたのであまり $\boxed{1}$ をたしかめ周期を決定する。

$$\begin{array}{rr} 1 \div 23 = & 0.\dot{0}4347826086 \\ + & 956521739 1\dot{3} \\ \hline & 99999999999 \end{array}$$

検算方法 － 循環節を2等分して加えると9がならぶ。

1÷N（Nは97から103）の表の観察

1 ÷ 97 = 0.0103092 7835

1 ÷ 98 = 0.0102040 8163

1 ÷ 99 = 0.0101010101

1 ÷ 100 = 0.01

1 ÷ 101 = 0.0099009 9009

1 ÷ 102 = 0.0098039 2156

1 ÷ 103 = 0.0097087 3786

何が読み取れますか？

問題

（ア）　1÷23　を計算して下さい。

（イ）　1÷17　を計算して下さい。

（ウ）　1÷32　を計算して下さい。

1÷49について

1÷49 = $0.\underbrace{02}_{①}\,\underbrace{04}_{②}\,\underbrace{08}_{③}\,\underbrace{16}_{④}\,\underbrace{32}_{⑤}$ 65 30 61 22 448 ……

$2^{ⓝ}$

$\left.\begin{array}{l} 2^6 = 64 \\ 2^7 = \ \ 128 \\ 2^8 = \ \ \ \ 256 \end{array}\right\} \rightarrow 6530$

$$\frac{1}{49} = \frac{1}{50-1} = \frac{2}{100-2}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{7}{49} = \frac{7}{50-1} = \frac{14}{100-2}$$

1÷7 = 0. 14 28 57 14 28 57

14×2=28　28×2=56　56×2=112　112×2=224

0.14/28/56/112/224

1÷23 = 0.04 34 78 26 08 69

$$\frac{1}{23} = \frac{4}{92} = \frac{4}{100-8}$$

4×8=32　32×8=256

256×8 = 2048

0.04/32/256/48

$$\frac{1}{17} = \frac{6}{102} = \frac{6}{100+2}$$

1÷17 = 0.05882352 ……

6×2=12
12×2=24
24×2=48
48×2=96
96×2=192

⊕	0.06
⊖	12
⊕	24
⊖	48
	0.0588 23 524

進法を変化させた時の 1÷Nの循環節の長さ (Nは素数)

進法 \ N	2	3	5	7	11	13	17	19	23
2	0	2	4	3	10	12	8	18	11
3	1	0	4	6	5	3	16	18	11
4	0	1	2	3	5	6	4	9	11
5	1	2	0	6	5	4	16	9	22
6	0	0	1	2	10	12	16	9	11
7	1	1	4	0	10	12	16	3	22
8	0	2	4	1	10	4	8	6	11
9	1	0	2	3	5	3	8	9	11
10	0	1	0	6	2	6	16	18	22
11	1	2	1	3	0	12	16	3	22
12	0	0	4	6	1	2	16	6	11
13	1	1	4	2	10	0	4	18	11
14	0	2	2	0	5	1	16	18	22
15	1	0	0	1	5	12	8	18	22
16	0	1	1	3	5	3	2	9	11
17	1	2	4	6	10	6	0	9	22
18	0	0	4	3	10	4	1	2	11
19	1	1	2	6	10	12	8	6	22
20	0	2	0	2	5	12	16	1	22
21	1	0	1	0	2	4	4	18	22
22	0	1	4	1	0	3	16	18	2
23	1	2	4	3	1	6	16	9	0
24	0	0	2	6	10	12	16	9	1

進法を変化させて調べてみました。

① Nが5以上の場合　2-0-1 が周期的にあらわれます。

② Nが5と17の場合　2-0-1 以外の部分をおりたたむと等しくなります。

N=17

```
2    3    4    5    6    7    8
8 - 16 - 4 - 16 - 16 - 16 - 8
8 - 16 - 4 - 16 - 16 - 16 - 8
15   14   13   12   11   10   9
```

③ Nが7と11と23の場合 2-0-1 以外の部分をおりたたむと2つの数字の和が同じになります。比は1対2です。

N=23

```
2    3    4    5    6    7    8    9    10   11
11 - 11 - 11 - 22 - 11 - 22 - 11 - 11 - 22 - 22
22 - 22 - 22 - 11 - 22 - 11 - 22 - 22 - 11 - 11
21   20   19   18   17   16   15   14   13   12
```

④ Nが19の場合　2-0-1 以外の部分をおりたたむと対になる2つの数字の比が1対2になります。

N=19

```
2    3    4    5    6    7    8    9
18 - 18 - 9 - 9 - 9 - 3 - 6 - 9
9 - 9 - 18 - 18 - 18 - 6 - 3 - 18
17   16   15   14   13   12   11   10
```

⑤ Nが29の場合 2-0-1 以外の部分をおりたたむと

N=29

```
2    3    4    5    6    7    8    9    10   11   12   13   14
28 - 28 - 14 - 14 - 14 - 7 - 28 - 14 - 28 - 28 - 4 - 14 - 28
28 - 28 - 7 - 7 - 7 - 14 - 28 - 7 - 28 - 28 - 4 - 7 - 28
27   26   25   24   23   22   21   20   19   18   17   16   15
```

同じになる場合と 1対2の比になる場合が混ざっています。

$28 = 2^2 \times 7$　　$4 = 2^2$　　2^2 の場合に同じになります。

$7 = 2^0 \times 7$　$14 = 2^1 \times 7$　　2^0 の場合は対になる数は2倍になり 2^1 の場合は対になる数は半分になります。

2^n+1 素数×2+1

5型の素数　7型の素数

対称

(等しい)

補完

(1対2)

5	4 4														
7	3 6	6 3													
11	10 5	5 10	5 10	5 10											
13	12 12	3 6	6 3	4 4	12 12										
17	8 8	16 16	4 4	16 16	16 16	16 16	8 8								
19	18 9	18 9	9 18	9 18	9 18	3 6	6 3	9 18							
23	11 22	11 22	11 22	22 11	11 22	22 11	11 22	11 22	22 11	22 11					
29	28 28	28 28	14 7	14 7	14 7	7 14	28 28	14 7	28 28	28 28	4 4	14 7	28 28		
31	5 10	30 15	5 10	3 6	6 3	15 30	5 10	15 30	15 30	30 15	30 15	30 15	15 30	10 5	
37	36 36	18 9	18 9	36 36	4 4	9 18	12 12	9 18	3 6	6 3	9 18	36 36	12 12	36 36	9 18
41	20 20	8 8	10 5	20 20	40 40	40 40	20 20	4 4	5 10	40 40	40 40	40 40	8 8	40 40	5 10
43	14 7	42 21	7 14	42 21	3 6	6 3	14 7	21 42	21 42	7 14	42 21	21 42	21 42	21 42	7 14

準7型 → 19, 31, 43

混在型 → 13, 29, 37, 41

進法	5	7	11	17
2	4	3	10	8
3	4	6	5	16
4	2	3	5	4
5	0	6	5	16
6	1	2	10	16
7	4	0	10	16
8	4	1	10	8
9	2	3	5	8
10	0	6	2	16
11	1	3	0	16
12	4	6	1	16
13	4	2	10	4
14	2	0	5	16
15	0	1	5	8
16	1	3	5	2
17	4	6	10	0
18	4	3	10	1
19	2	6	10	8
20	0	2	5	16
21	1	0	2	4

〔問題2〕

1÷5の循環節です。何進法ですか。

(1) $0.\dot{1}46\dot{3}$　　(2) $0.\dot{1}25\dot{4}$

〔問題3〕

十進法で 1÷7 は $0.\dot{1}4285\dot{7}$ と 6桁の数字をくり返します。循環節の長さが 1桁、2桁になるのは何進法のときですか。3進法、9進法、17進法、27進法、81進法のときはどうなりますか。

41進法での 1÷29 の計算

```
        0. 1 (16) (29) (24)
29 ) 1
    -0
     1
×41    41
      -29
       12
×41      492
        -464
          28
×41        1148
          -1131
             17
×41            697
              -696
                 1
```

```
   1     (16)
+ (29)   (24)
-------------
  (40)   (40)
```


41進法での 1÷N の循環節の長さを調べました。

(M)

〔41進法を使った理由〕

Nが5以上の場合に 2-0-1が周期的にあらわれます。

そこで 2-0-1の部分について調べることにしました。2-0-1とは

2→M+1　0→M　1→M−1　となる部分です。

$41+1=42=2\times3\times7$　Ⓐ→②
$41-1=40=2\times2\times2\times5$　Ⓑ→①　約数がたくさんあります。

例外として $41^2+1=2\times29^2$ も含まれています。41進法で 1÷29 と $1\div29^2$ のどちらも循環節の長さが4桁になります。

N		循環節の長さ		
2		Ⓑ1	= 1	
3		Ⓐ2	= 2	
4	2×2	Ⓑ1 Ⓑ1	= 1	
5		Ⓑ1	= 1	
6	2×3	Ⓑ1 Ⓐ2	= 2	
7		Ⓐ2	= 2	
8	2×2×2	Ⓑ1, Ⓑ1, Ⓑ1,	= 1	
9	3×3	Ⓐ2 ×3	= 6	3×3と同じ素数がある時は2つ目からはその数をかける。
10	2×5	Ⓑ1, Ⓑ1,	= 1	
11				
12	2×2×3	Ⓑ1, Ⓑ1, Ⓐ2	= 2	
13				
14	2×7	Ⓑ1, Ⓐ2	= 2	
15	3×5	Ⓐ2 Ⓑ1	= 2	
16	2×2×2×2	Ⓑ1, Ⓑ1, Ⓑ1, Ⓐ2	= 2	Ⓑを使いつくしてからⒶを使う
17				
18	2×3×3	Ⓑ1, Ⓐ2 ×3	= 6	

電卓を使った数あそび (12桁を使いました。)

① 1÷9 = 0.111111111111

÷9 = 0.01234567901

② 1÷99 = 0.0101010101

÷9 = 0.00 11 22 33 445

③ 101÷99 = 1.0202020202

÷99 = 0.0103050709 1

÷99 = 0.0001040916 2

④ 1÷89 = 0.011 23 59 5505

10000÷9899 = 1.0102030508 1

⑤ 10401÷99 = 105.06060606

÷99 = 1.06 12 18 24 303

÷99 = 0.01 07 19 37 619

÷99 = 0.000 108 27 652

③の説明

$1000000 \div 99^3 =$ 1.0306 10 15 212

1.01× をつけ加えると + 0.01.0306 10 152

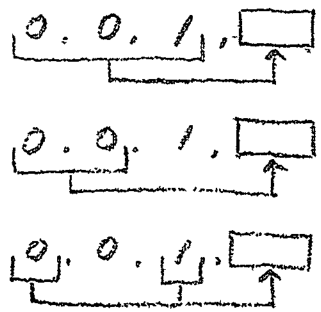
1.0409 16 25 364

数列の規則性は？

0、1から始まります。

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4,
5, 9, 4, 3, 7, 0, 7, 7, 4, 1,
5, 6, 1, 7, 8, 5, 3, 8, 1, 9,
0, 9, 9, 8, 7, 5, 2, 7, 9, 6,
5, ……

周期のある数列です。条件(mod)を変化させて周期の長さを調べてみて下さい。



と変化させるとどうなるでしょうか？

（フィボ・トリボ）ナッチ式剰余数列の周期

mod	(0.1)	(0.0.1)	($\underline{0.0}.1$)	($\underline{0}.0.\underline{1}$)
2	3 2^2-1	4 2×2	7 2^3-1	7 2^3-1
3	8 3^2-1	13 $(3^3-1)\div2$	13 $(3^3-1)\div2$	8 3^2-1
4 2×2	6 3×2	8 4×2	14 7×2	14 7×2
5	20 4×5	31 $(5^3-1)\div4$	24 5^2-1	31 $(5^3-1)\div4$
6 2×3	24 3×8	52 4×13	91 7×13	56 7×8
7	16 $(7^2-1)\div3$	48 7^2-1	48 7^2-1	57 $(7^3-1)\div6$
8 $2\times2\times2$	12 $3\times2\times2$	16 $4\times2\times2$	28 $7\times2\times2$	28 $7\times2\times2$
9 3×3	24 8×3	39 13×3		
10 2×5	60 3×20	124 4×31		
11		110 10×11		

平方数の表づくり

[作り方]

(ア) 1つづつかけ算をする。

(イ) $(N+1)^2 = N^2 + 2N + 1$ を利用する。

(ウ) 一の位，十の位…の数字のならび方を調べる。

N = 1 より N = 10
[九九を使って](ア)

N	N^2	差を調べる。
1	1	
2	4	3 = 2+1 = 2×1+1
3	9	5 = 4+1 = 2×2+1
4	16	7 = 6+1 = 2×3+1
5	25	9 = 8+1 = 2×4+1
6	36	11 = 10+1 = 2×5+1
7	49	13 = 12+1 = 2×6+1
8	64	15 = 14+1 = 2×7+1
9	81	17 = 16+1 = 2×8+1
10	100	19 = 18+1 = 2×9+1
		2N+1

N = 10 より N = 20
[$(N+1)^2 = N^2+2N+1$ を使って](イ)

N		N^2
10		100
11	100+20+1 =	121
12	121+22+1 =	144
13	144+24+1 =	169
14	169+26+1 =	196
15	196+28+1 =	225
16	225+30+1 =	256
17	256+32+1 =	289
18	289+34+1 =	324
19	324+36+1 =	361
20	361+38+1 =	400

N = 20 より N = 30

N		N^2
20		400
21	400+41 =	441
22	441+43 =	484
23	484+45 =	529
24	529+47 =	576
25	576+49 =	625
26	625+51 =	676
27	676+53 =	729
28	729+55 =	784
29	784+57 =	841
30	841+59 =	900

[数字のならび方を調べる](ウ)

[一の位の数字のならび方]

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	-5	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	+5
	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0

5 を中心にして左右対称になっている。

$$(5+a)^2 = 25 + 10a + a^2$$

N	a	
3	-2	25 − 20 + 4 = 9
7	+2	25 + 20 + 4 = 49

N=20 より N=30
[一の位のならび方を使って]

N (一の位が ⊖ の時は十の位を1つ大きくする。)

N				
20	×2=40	40	0	⊕
21		44	1	⊕
22		48	4	⊕
23		52	9	⊖
24		57	6	⊖
25	×2=50	62	5	⊕
26		67	6	⊕
27		72	9	⊖
28		78	4	⊖
29		84	1	⊖
30	×2=60	90	0	

[下2桁の数字のならび方]

20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	(N)
-5	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	+5	(a)
00	41	84	29	76	25	76	29	84	41	00	

25 を中心にして左右対称になっている。

$$(25+a)^2 = 625 + 50a + a^2$$

N	a	
22	-3	625 − 150 + 9 = 484
28	+3	625 + 150 + 9 = 784

784 − 484 = 150×2 = 300
差は300になり下2桁は同じ。

N = 30 より N = 40
[下2桁のならび方を使って]

N (N=10よりN=20の表を使います。)

N		N=20	
30	9	00	⊕
31	9	61	⊖
32	10	24	⊕
33	10	89	⊖
34	11	56	⊖
35	12	25	⊕
36	12	96	⊖
37	13	69	⊖
38	14	44	⊖
39	15	21	⊖
40	16	00	
	↑	N=10	

$\boxed{\text{Nが50まで}}$ → [⊖の時に1つ加えます。]

M乗数の表

N^1	N^2	N^3	N^4	N^5	N^6	N^7	N^8
1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256
3	9	27	81	243	729	2187	6561
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721
10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000

N	N^9	N^{10}	N^{11}	N^{12}	N^{13}
1	1	1	1	1	1
2	512	1024	2048	4096	8192
3	19683	59049	177147	531441	1594323
4	262144	1048576	4194304	16777216	67108864
5	1953125	9765625	48828125	244140625	1220703125
6	10077696	60466176	362797056	2176782336	13060694016
7	40353607	282475249	1977326743	13841287201	96889010407
8	134217728	1073741824	8589934592	68719476736	549755813888
9	387420489	3486784401	31381059609	282429536481	2541865828329
10	1000000000	10000000000	100000000000	1000000000000	10000000000000

N	N^{14}	N^{15}	N^{16}	N^{17}
1	1	1	1	1
2	16384	32768	65536	131072
3	4782969	14348907	43046721	129140163
4	268435456	1073741824	4294967296	17179869184
5	6103515625	30517578125	152587890625	762939453125
6	78364164096	470184984576	2821109907456	16926659444736
7	678223072849	4747561509943	33232930569601	232630513987207
8	4398046511104	35184372088832	281474976710656	2251799813685248
9	22876792454961	205891132094649	1853020188851841	16677181699666569
10	100000000000000	1000000000000000	10000000000000000	100000000000000000

M乗数の表

N^1	N^2	N^3	N^4	N^5	N^6	N^7	N^8	N^9
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489
10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000

N^1 N^5 N^9	N^2 N^6	N^3 N^7	N^4 N^8

１の位を調べると奇数乗では５を中心として和が10に、偶数乗では同じになることがわかります。Nを4で割ったあまりで4つのグループに分けることができました。

１の位は10で割ったあまりなので10以外の数字で割って調べてみました。

N^3 の6で割ったあまりを調べました。

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000
$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$

$11^3 = 1331 = 221 \times 6 + \boxed{5}$

0-1-2-3-4-5 ときれいに数字がならびます。

N^5 の6で割ったあまりを調べました。

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
1	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049	100000
$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$

6進法での 1÷8 の計算　（6進法による計算）

$8 = 2\times2\times2 = 2^3$ なので $6 = 2\times3$ となる 6進法では小数点以下3桁で割り切れます。

6進法で 8 は 12となり 2桁になります。そこで $8 = 4\times2$ と考え 2段階の計算をします。

```
     0.1 3
4 ) 1
    1 0
  −   4
      2 0
    − 2 0
        0
```

```
     0.0 4 3
2 ) 0.1 3
    − 1 2
        1 0
      − 1 0
          0
```

	1	2	3	4	5	10
1	1	2	3	4	5	10
2	2	4	10	12	14	20
3	3	10	13	20	23	30
4	4	12	20	24	32	40
5	5	14	23	32	41	50
10	10	20	30	40	50	100

12の倍数の表を先に作っておく方法

```
      0.0 4 3
12 ) 1
     1 0 0
   −  5 2
       4 0
     − 4 0
         0
```

$0\times12 = 0$
$1\times12 = 12$
$2\times12 = 24$
$3\times12 = 40$
$4\times12 = 52$
$5\times12 = 104$

0.0 4 3 の正しいことの説明

$$\frac{0}{6^1}+\frac{4}{6^2}+\frac{3}{6^3} = \frac{24+3}{6^3} = \frac{27}{6^3} = \frac{3^3}{6^3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

6進法での 1÷8の計算　（10進法による計算）

6進法では 8 は12と表記しますが、10進法の表記の 8をそのまま使います。計算は 10進法で行ないます。

```
         0. 0 4 3
     8 ) 1
       − 0
         1
×6         6
         − 0
           6
×6         3 6
         − 3 2
             4
×6           2 4
           − 2 4
               0
```

$\frac{a}{6^1}+\frac{b}{6^2}+\frac{c}{6^3}+\cdots$ という形に分解したい。

10進法の 1÷8とくらべるとちがいがよくわかります。

```
         0. 1 2 5
     8 ) 1
       − 0
         1
×10      1 0
       −   8
           2
×10        2 0
         − 1 6
             4
×10          4 0
           − 4 0
               0
```

0をつけ加えているのではなく 10倍している。

0.1×1　0.01×2　0.001×5

0. 1 2 5 とは

$$\frac{1}{10^1}+\frac{2}{10^2}+\frac{5}{10^3} = \frac{125}{10^3}$$

$$= \frac{5^3}{10^3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

等比数列の和を使った 1÷23 の計算

$$\frac{1}{23}=\frac{4}{92}=\frac{4}{100-8}$$

$4\times 8=32 \quad 32\times 8=256 \quad 256\times 8=2048$

$2048\times 8=16384 \quad 16384\times 8=131072$

$131072\times 8=1048576$

$1048576\times 8=8388608$

```
  0.04          ①
    32           0.08¹
     256         0.08²
      2048       0.08³
       16384     0.08⁴
        131072   0.08⁵
         1048576 0.08⁶
+         8388608 0.08⁷
---------------------
  0.0434782 60
```

$$1\div 23=0.04\times(1+0.08^1+0.08^2+0.08^3+0.08^4+\cdots)$$

分母が 10^n に近い数をさがしました。

$$\frac{1}{23}=\frac{4}{92}=\frac{4}{100-8}=\frac{12}{300-24}=\frac{13}{300-1}=\frac{13\times 35}{(300-1)\times 35}$$

$(23\times 20=460)$

$$=\frac{455}{10500-35}=\frac{455}{10465}=\frac{435}{10005}=\frac{435}{10000+5}$$

$$=\frac{4350}{100000+50}=\frac{4348}{100000+4}$$

$$\frac{1}{23}=\frac{4348}{100000+4} \qquad x_0=0.04348$$

$$r_0=-0.00004$$

等比数列の和を加速するとニュートン法と同等になります。

$$\underline{1+x}+\underline{\underline{x^2+x^3}}+\underline{\underline{\underline{x^4+x^5+x^6+x^7}}}+$$

$$(1+x)\cdot(1+x^2)\cdot(1+x^4)\cdot(1+x^8)$$

```
   1 + x
×  1       + x²
----------------------
   1 + x + x² + x³
×  1                + x⁴
----------------------------------------
   1 + x + x² + x³ + x⁴ + x⁵ + x⁶ + x⁷
```

因数分解を使ってベキ級数を分解しました。

ニュートン法

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$f(x_n)=x_n^{-1}-a$$

$$f'(x_n)=-x_n^{-2}$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^{-1}-a}{-x_n^{-2}}$$

$$=x_n+x_n-a x_n^2$$

$$=x_n(2-a x_n)$$

ニュートン法による 1÷23 の計算

$$\frac{1}{23} = \frac{4}{92} = \frac{4}{100-8}$$

$a = 23 \qquad x_0 = 0.04$ とすると

$x_1 = 0.0432$

$x_2 = 0.04347648$

$x_3 = 0.043478260797966208$

$x_4 = 0.043478260869565217268923923916928$

$x_0 = 0.04$

$$0.04 \times (2 - \underbrace{0.04 \times 23}_{\times 1.08})$$

$x_1 = 0.0432$

$$0.0432 \times (2 - \underbrace{0.0432 \times 23}_{\times 1.0064})$$

$x_2 = 0.04347648$

$$0.04347648 \times (2 - \underbrace{0.04347648 \times 23}_{\times 1.00004096})$$

$x_3 = 0.043478260797966208$

$$1.08 = 1 + 0.08^1$$

$$1.0064 = 1 + 0.08^2$$

$$1.00004096 = 1 + 0.08^4$$

1÷23の計算（加速化された数列の和）　（12桁の電卓を使って）

$$\frac{1}{23} = \frac{4348}{100000+4}$$

$x_0 = 0.04348$

$r_0 = -0.00004$

$4348 \times 4 = 17392$

$$\begin{array}{l} 0.04348 \quad \overbrace{}^{\text{5桁ずらす}} \\ - \qquad\qquad 17392 \\ \hline \end{array}$$

☆1 0.0434782608

$434782608 \times 16 = 6956521728$

$$\begin{array}{l} 0.0434782608 \quad \overbrace{}^{\text{5桁×2=10桁ずらす}} \\ + \qquad\qquad 6956521728 \\ \hline \end{array}$$

☆2 0.04347826086956521728

$434782608 \times 256 = 111304347648$

$695652172 \times 256 = 178086956032$　（1桁）

$8 \times 256 = 2048$　（1桁）

$$\begin{array}{l} 111304347648 \quad \overbrace{}^{\text{9桁ずらす}} \\ \qquad\qquad 178086956032 \quad \text{1桁ずらす} \\ + \qquad\qquad\qquad 2048 \\ \hline 1113043478260869562368 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 0.04347826086956521728 \quad \overbrace{}^{\text{5桁×4=20桁ずらす}} \\ + \qquad\qquad 1113043478260869562368 \\ \hline \end{array}$$

☆4 $0.0434782608695652173913043478260869562368$

$1 \div 23 = 0.04348 \times 0.99996 \times$
$1.0000000016 \times$
1.0000000000000000256
$\times \cdots$

$1 \div 23 = 0.04348$
$\times \{1 + (-0.00004)^1\}$
$\times \{1 + (-0.00004)^2\}$
$\times \{1 + (-0.00004)^4\}$
$\times \{1 + (-0.00004)^8\}$
$\times \cdots$

$5217 - 2368 = \underline{2849}$

$256 \times 256 = 65536$

$65536 \times 434782 6$

$= \underline{2849}39124736$

$65536 = 4^8$

☆4の誤差を使って

$\times \{1 + (-0.00004)^8\}$

になることを確かめました。

（注）

5桁×○ でずらすのは

$-0.\underbrace{00004}_{\text{5桁}}$ だからです。

江戸期の循環小数の研究に学ぶ

一、循環小数とは何か

一を七で割ると〇、一四二八五七一四二八五七一四二……と一四二八五七の六個の数字をくり返します。このようにくり返す数字のことを循環小数といい、循環の一周期を循環節といいます。

二、なぜ循環するのか

一を四で割ると〇、二五で割り切れます。一を八で割ると〇、一二五で割り切れます。一割七は割り切れません。計算の途中にでてくるあまりについて調べてみます。

一割四は　一→二→〇

一割八は　一→二→四→〇

一割七は　一→三→二→六→四→五→一

一割七のあまりは六個の数字をくり返します。六は七より一引いた数です。あまりに一が出てくると計算は始まりにもどります。割り切れない場合、なぜ同じ数をくり返すのかの理由はあまりを調べることでわかります。

三、山路主住さんの研究

山路主住（一七〇四—一七七三）さんは割り算の商とあまりについて注意深く調べ、大きな割り算を何人かで協力して行う方法をみつけました。たとえば十番目のあまりを使って二十番目四十番目のあまりを求めると二十一番目からと四十一番目からを同時に計算することができます。この方法は大きな数の割り算に役立ちます。例として一割四十九の計算をします。

一割四十九は

〇、〇二〇四〇八一六三二六五三……

十番目のあまりは三十二です。

三十二に三十二をかけると一〇二四

一〇二四を四十九で割るとあまりは四十四

三十二に四十四をかけると一四〇八

一四〇八を四十九で割るとあまりは三十六

四十四に四十四をかけると一九三六、

一九三六を四十九で割るとあまりは二十五

十一番目からは三十二割四十九

二十一番目からは四十四割四十九

三十一番目からは三十六割四十九

四十一番目からは二十五割四十九

計算すると一割四十九は

〇、〇二〇四〇八一六三二

六五三〇六一二二四四

八九七九五九一八三六

七三四六九三八七七五

五一〇二〇四〇八一六

四十二個の数字をくり返します。四十二

個の数字を七等分して加えると一割七の循環小数がみえてきます。四十二を六かける七と考えますと、七を三回かけた三四三の場合を予想することができます。

四、有馬頼徸さんについて

有馬頼徸（一七一四—一七八三）さんは久留米藩主になった方です。大名の立場を利用し関流数学の秘伝を公にしました。この中に循環小数の周期の長さを求める方法が書かれています。三つの規則性によって成りたっています。

ア、成分の保存則

割る数を素数に分解します。

イ、最小公倍数の規則性

素数それぞれの循環節の長さを求め最小公倍数を求めます。

ウ、定数倍の規則性

同じ素数が二個以上ある場合は、二個目以上の数だけその数をかけます。

例として一割三九〇八三の循環節の長さを求めます。

三九〇八三を素数に分解すると十七かける十九かける十一かける十一

一割十七の循環節の長さは十六

一割十九の循環節の長さは十八

一割十一の循環節の長さは二

十一に十一をかけた一二一の場合は、二に十一をかけた二十二になります。

十六と十八と二十二の最小公倍数を求めると一五八四になります。

この方法は割り算をたくさん行い、循環節の長さの表をつくり、分析して規則性を求めてみつけたのだと思います。

五、数学においての実験と観察について

江戸期の循環小数の研究は、具体的な数値を分析する方法を教えてくれます。日本は明治以降西洋数学を完成された形で移入したのではないかと疑問をもっています。西洋の近代数学の形成過程を知る必要を感じます。なぜならヨーロッパの近代科学の精神は、実験と観察だと思うからです。

六、定数倍の規則性の例外について

七進法で計算しました。

一割五の循環節の長さは四ケタ

一割五の二乗は四ケタ

一割五の三乗は二〇ケタ

一割五の四乗は一〇〇ケタ

例外がみつかりました。他の事例をさがしました。平方根の近似分数の研究が役にたちました。七に七をかけて一を加えると五十になります。五に五をかけて二をかけても五十になります。この関係を使って式をつくりました。

七、盤江町でみつけた河川技術書

「秘伝定伝」（一七三六）の解説書を盤江町歴史民俗資料館が発行しています。ピタゴラスの定理を使った計算も出てきます。水害との戦いに最新の技術を吸収したことが示されています。

M進法で1÷Nと1÷N²の循環節が同じケタ数になる場合の一例

$M^2+A \fallingdotseq B\times N^2$

Bは自然数、M／Nは$\sqrt{B}$の近似分数

A＝－1の場合　2ケタ

A＝　1の場合　4ケタ

八、長崎和算研究会の森光寸さんの研究を参考にしました。ありがとうございます。

Y.T.

平成18年12月

2020．3．12

定数倍の規則性と例外について

山路主住さん（1704－1773）に「素数冪の節位数」の研究があります。

M進法における $1/N^n$ の一般型（ℓは循環節の長さ）

$M=10$, $M=5$, $M=3$

$N=7$　$\ell=6$　↓×7

$N=7^2$　$\ell=42$　↓×7

$N=7^3$　$\ell=294$　↓×7

$N=7^4$　$\ell=2058$

$M=10$　$N=11$　$\ell=2$

$N=11^2$　$\ell=22$

$N=11^3$　$\ell=242$

$N=11^4$　$\ell=2662$

〔例外1〕

$M=10$　$N=3$　$\ell=1$

$N=3^2$　$\ell=1$

$10-1=9=3\times3$ によって説明できる。

$(N=M-1 \rightarrow \ell=1)$

〔例外2〕

$M=7$　$N=5$　$\ell=4$　↓×1

$N=5^2$　$\ell=4$　↓×5

$N=5^3$　$\ell=20$　↓×5

$N=5^4$　$\ell=100$

$M^2+A=B\cdot N^2$（Bは自然数）

$A=-1$　$\ell=2$

$A=1$　$\ell=4$

$M=17$　$N=12$　$\ell=2$　↓×1

$N=12^2$　$\ell=2$　↓×6

$N=12^3$　$\ell=12$　↓×12

$N=12^4$　$\ell=144$　↓×12

$N=12^5$　$\ell=1728$

$17+1=18=2\times3\times3$

$17-1=16=2\times2\times2\times2$

〔2が1つあまっているので×6になる。〕

〔例外3〕の例.

$M=3$　$N=11$　$\ell=5$

$M=9$　$N=11$　$\ell=5$

$M=10$　$N=487$　$\ell=486$

$M=11$　$N=71$　$\ell=70$

$M=14$　$N=29$　$\ell=28$

$N=353$　$\ell=352$

$M=18$　$N=7$　$\ell=3$

$N=37$　$\ell=36$

$N=331$　$\ell=110$

$M=20$　$N=281$　$\ell=140$

（橋本光さんの研究より）

$M=3$, $M=9$　$N=11$　$N=11^2$　$\ell=5$ について

$N=11^2$

$M=3$	$\ell=5$	$3=3^1$
$M=6$	$\ell=110$	(10×11)
$M=9$	$\ell=5$	$9=3^2$
$M=12<^{11}_{13}$	$\ell=11$	(1×11)
$M=15$	$\ell=55$	(5×11)
$M=18$	$\ell=110$	(10×11)
$M=21<^{20}_{22}$	$\ell=22$	(2×11)
$M=24$	$\ell=110$	(10×11)
$M=27$	$\ell=5$	$27=3^3$
$M=30$	$\ell=110$	(10×11)
$M=81$	$\ell=5$	$81=3^4$

$M=10$　$N=487$

$N=487^2$

$\ell=486$

$M=10^2$　$\ell=243$

$M=10^3$　$\ell=162$

$M=10^4$　$\ell=243$

$M=10^5$　$\ell=486$

$M=10^6$　$\ell=81$

$486=2\times3^5$

$486\div2=243$

$486\div3=162$

$486\div6=81$

$M=10$　$10-1=9=3\times3$　$10+1=11$

$N=3$　$\ell=1$

$N=3^2$　$\ell=1$

$N=487$　$\ell=486$

$N=487^2$　ℓ 486

$N=1461=3\times487$

$(1, 486)\rightarrow486$

$N=1461^2=3^2\times487^2$

$(1, 486)\rightarrow486$

$M=10^n$ としても

$1/487$ と $1/487^2$ の ℓ が同じになるという性質は保存されています。

$3\times487=1461$

の場合でも成立します。

$1 \div 32 = 0.03125$

$$\frac{1}{32} = \frac{3}{96} = \frac{3}{100-4}$$

n	4^n	$\times 3$
0	1	3
1	4	12
2	16	48
3	64	192
4	256	768
5	1024	3072
6	4096	12288
7	16384	49152
8	65536	196608

```
0.03
    12
      48
       192
         768
          3072
           12288
             49152
              196608
+
---------------------
0.0312499999
```

かけ算の表の観察

九九の表

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	(10)
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
(10)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

6進法のかけ算の表

	1	2	3	4	5	(10)
1	1	2	3	4	5	10
2	2	4	10	12	14	20
3	3	10	13	20	23	30
4	4	12	20	24	32	40
5	5	14	23	32	41	50
(10)	10	20	30	40	50	100

〔問題1〕かけ算の表の一部です。何進法のどの部分ですか?

(例) 7進法

	2	3
5	13	21
6	15	24

$2 \times 5 = 10 = 1 \times 7 + 3$ (13)

$3 \times 5 = 15 = 2 \times 7 + 1$ (21)

$2 \times 6 = 12 = 1 \times 7 + 5$ (15)

$3 \times 6 = 18 = 2 \times 7 + 4$ (24)

(1)

13	20
15	23

(2)

11	14
14	20

(3)

15	18
20	24

(4)

14	22
22	31

ヒント

(1)
1の位が同じになる時は?

(2)
右上と左下が同じになる時は?

(3)
素数がありません。

(4)
(2)の条件に加え 右上、右下、左下の 2つの数字を加えると同じになります。