2022.2.27

武田利一様

おいそがしい日々をすごされていると思います。お体に気をつけて下さい。

2015.4.10 ~ 2015.12.15 のレポートを見なおしています。

レポート 2015.7.22 P.30 計算方法の表 1/N を求める

- 筆算による割り算
- 等比数列の和を使う方法
- ニュートン法 $x_{n+1} = x(2 - ax_n)$

について少し整理をしました。

もしよろしければ御意見をお知らせ下さい。

林 邦英

6進法での 1÷8 の計算　（6進法による計算）

$8=2\times2\times2=2^3$ なので　$6=2\times3$ となる 6進法では 小数点以下 3桁で割り切れます。

6進法で 8 は 12となり 2桁になります。そこで $8=4\times2$ と考え 2段階の計算をします。

```
     0.1 3
 4 ) 1
     1 0
   -   4
       2 0
     - 2 0
         0
```

```
      0.0 4 3
 2 ) 0.1 3
    - 1 2
        1 0
      - 1 0
          0
```

	1	2	3	4	5	10
1	1	2	3	4	5	10
2	2	4	10	12	14	20
3	3	10	13	20	23	30
4	4	12	20	24	32	40
5	5	14	23	32	41	50
10	10	20	30	40	50	100

12の倍数の表を先に作っておく方法

```
      0.0 4 3
 12 ) 1
      1 0 0
    - 5 2
        4 0
      - 4 0
          0
```

$0\times12=0$
$1\times12=12$
$2\times12=24$
$3\times12=40$
$4\times12=52$
$5\times12=104$

0.0 4 3 の正しいことの説明

$$\frac{0}{6^1}+\frac{4}{6^2}+\frac{3}{6^3}=\frac{24+3}{6^3}=\frac{27}{6^3}=\frac{3^3}{6^3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$$

6進法での 1÷8 の計算　（10進法による計算）

6進法では 8 は 12と表記しますが、10進法の表記の 8をそのまま使います。計算は 10進法で行ないます。

```
        0. 0 4 3
 8 )   1
     - 0
       1
 ×6    6
     - 0
       6
 ×6    3 6
     - 3 2
         4
 ×6      2 4
       - 2 4
           0
```

$\frac{a}{6^1}+\frac{b}{6^2}+\frac{c}{6^3}+\cdots$ という形に分解したい。

10進法の 1÷8 とくらべるとちがいがよくわかります。

```
        0. 1 2 5
 8 )   1
     - 0
       1
 ×10   1 0
     -   8
         2
 ×10     2 0
       - 1 6
           4
 ×10       4 0
         - 4 0
             0
```

0をつけ加えているのではなく 10倍している。

0.1×1　0.01×2　0.001×5

0. 1 2 5 とは

$$\frac{1}{10^1}+\frac{2}{10^2}+\frac{5}{10^3}=\frac{125}{10^3}$$

$$=\frac{5^3}{10^3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$$

等比数列の和を使った 1÷23 の計算

$$\frac{1}{23} = \frac{4}{92} = \frac{4}{100-8}$$

$4 \times 8 = 32$　　$32 \times 8 = 256$　　$256 \times 8 = 2048$

$2048 \times 8 = 16384$　　$16384 \times 8 = 131072$

$131072 \times 8 = 1048576$

$1048576 \times 8 = 8388608$

$$
\begin{array}{rl}
0.04 & ① \\
32 & (0.08^1) \\
256 & (0.08^2) \\
2048 & (0.08^3) \\
16384 & (0.08^4) \\
131072 & (0.08^5) \\
1048576 & (0.08^6) \\
+\quad 8388608 & (0.08^7) \\
\hline
0.043478260 &
\end{array}
$$

$$1 \div 23 = 0.04 \times (1 + 0.08^1 + 0.08^2 + 0.08^3 + 0.08^4 + \cdots)$$

分母が 10^n に近い数をさがしました。

$$\frac{1}{23} = \frac{4}{92} = \frac{4}{100-8} = \frac{12}{300-24} = \frac{13}{300-1} = \frac{13 \times 35}{(300-1) \times 35}$$

$$= \frac{455}{10500-35} = \frac{455}{10465} \quad (23 \times 20 = 460) \quad = \frac{435}{10005} = \frac{435}{10000+5}$$

$$= \frac{4350}{100000+50} = \frac{4348}{100000+4}$$

$$\frac{1}{23} = \frac{4348}{100000+4} \qquad x_0 = 0.04348$$

$$r_0 = -0.00004$$

等比数列の和を加速するとニュートン法と同等になります。

$$\underline{1 + x} + \underline{\underline{x^2 + x^3}} + \underline{\underline{\underline{x^4 + x^5 + x^6 + x^7}}} + \cdots$$

$$(1+x) \cdot (1+x^2) \cdot (1+x^4) \cdot (1+x^8)$$

$$
\begin{array}{rl}
 & 1 + x \\
\times & 1 + x^2 \\
\hline
 & 1 + x + x^2 + x^3 \\
\times & 1 + x^4 \\
\hline
 & 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7
\end{array}
$$

因数分解を使ってべき級数を分解しました。

ニュートン法

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$f(x_n) = x_n^{-1} - a$$

$$f'(x_n) = -x_n^{-2}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^{-1} - a}{-x_n^{-2}}$$

$$= x_n + x_n - a x_n^2$$

$$= x_n (2 - a x_n)$$

ニュートン法による 1÷23 の計算

$$\frac{1}{23} = \frac{4}{92} = \frac{4}{100-8}$$

$a = 23$ $x_0 = 0.04$ とすると

$x_1 = 0.0432$

$x_2 = 0.04347648$

$x_3 = 0.0434782607966208$

$x_4 = 0.04347826086956521726892392316928$

$x_0 = 0.04$

$0.04 \times (2 - 0.04 \times 23)$
$\times 1.08$

$x_1 = 0.0432$

$0.0432 \times (2 - 0.0432 \times 23)$
$\times 1.0064$

$x_2 = 0.04347648$

$0.04347648 \times (2 - 0.04347648 \times 23)$
$\times 1.00004096$

$x_3 = 0.0434782607966208$

$1.08 = 1 + 0.08^1$

$1.0064 = 1 + 0.08^2$

$1.00004096 = 1 + 0.08^4$

1÷23の計算（加速は等比数列の和）（12桁の電卓を使って）

$4348 \times 4 = 17392$

$$\frac{1}{23} = \frac{4348}{100000+4}$$

$x_0 = 0.04348$

$r_0 = -0.00004$

$$\begin{array}{lr} & 0.04348\ \underbrace{}_{5桁ずらす} \\ - & 17392 \\ \hline ☆1 & 0.0434782608 \end{array}$$

$434782608 \times 16 = 695652172 8$

$$\begin{array}{lr} & 0.0434782608\ \underbrace{}_{5桁 \times 2 = 10桁ずらす} \\ + & 6956521728 \\ \hline ☆2 & 0.04347826086956521728 \end{array}$$

$434782608 \times 256 = 111304347648$

$695652172 \times 256 = 178086956032$ （9桁）

$8 \times 256 = 2048$ （1桁）

$$\begin{array}{lr} & 111304347648\ \underbrace{}_{9桁ずらす} \\ & 178086956032\ \text{1桁ずらす} \\ + & 2048 \\ \hline & 1113043478260869562368 \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} & 0.04347826086956521728\ \underbrace{}_{5桁 \times 4 = 20桁ずらす} \\ + & 1113043478260869562368 \\ \hline ☆4 & 0.04347826086956\underline{5217}391304347826086956\underline{2368} \end{array}$$

$5217 - 2368 = \underline{2849}$
$256 \times 256 = 65536$
$65536 \times 434782 6$
$= \underline{2849}391247 36$
$65536 = 4^8$

1÷23 = 0.04348 × 0.99996 ×
1.0000000016 ×
1.0000000000000000256
× ....

1÷23 = 0.04348
$\times \{1 + (-0.00004)^1\}$
$\times \{1 + (-0.00004)^2\}$
$\times \{1 + (-0.00004)^4\}$
$\times \{1 + (-0.00004)^8\}$
× ....

☆4の誤差を使って
$\times \{1 + (-0.00004)^8\}$
になることを確かめました。

（注）
5桁×○をずらすのは
$-0.\underbrace{00004}_{5桁}$
だからです。