2022. 2. 22

武田 利一 様

レポート 2022.2.3「かけ算の表の観察」P.11 の「進法を変化させた時の 1÷N の循環節の長さ（Nは素数）」の表で 循環節の長さが N−1 となる場合の個数を求める方法を知りました。 Nが 11の場合を例にします。 11−1 = 10　10 = 2×5　10÷2 = 5 ㋐　10÷5 = 2 ㋑

2×5=10
10÷10 = 1 ㋒　10 − 5 ㋐ − 2 ㋑ + 1 ㋒ = 4.　10となる場合が 4である

ことがわかります。 N = 17の 場合では、 17−1 = 16　16 = 2×2×2×2

16÷2 = 8　16−8 = 8　16となる場合は 8であることがわかります。

『数論入門 証明を理解しながら学べる』芹沢正三著（ブルーバックス）の

$\boxed{\text{P. 72}}$ で 位数と原始根 について書かれています。

フェルマーの小定理によれば、素数 P に対して

$(a, p) = 1$ ならば $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

であるが $p-1$ よりも 小さな k で $a^k \equiv 1 \pmod{p}$

になるような数 a もある。 a を k乗して始めて $a^k \equiv 1 \pmod{p}$

となる k を、p を法とする a の位数といい、$\mathrm{ord}_p(a) = k$ と書く。

これに対して、$p-1$ より 小さな k では $\equiv 1 \pmod{p}$ にならず、

ちょうど $(p-1)$ べキで $\equiv 1 \pmod{p}$ になるような すなわち

$\mathrm{ord}_p(g) = p-1$ のような g を 原始根 という。

$\boxed{\text{P. 79}}$ 3−2 の (C) で 奇素数 P の 原始根の個数について書かれていました。

本の紹介

この本のP.280－P.281には　3から97までの素数の位数表があります。

このあとに　0，1　をつけ加えて循環させると進法を変化させた時の1÷N（Nは素数）の循環節の長さの表になります。あまりが1になる時という共通点があるからです。

「初等整数論講義　第2版」高木貞治著（共立出版）のP.57－P.61に循環小数について書かれています。〔例1〕は1÷7～6÷7について〔例2〕は1÷13のグループと2÷13のグループについて〔例3〕では÷91について書かれています。「91を分母とする既約真分数 $\varphi(91)=\varphi(7)\varphi(13)=72$ 個が六つずつ12群に分かれ、各群に属する六つの既約真分数の小数への展開における循環の一節は同一の六つの数字の循環置換である。」(P.61)

「オイラーの贈物　人類の至宝 $e^{i\pi}=-1$ を学ぶ」吉田武著（ちくま学芸文庫）には「99までの自然数の逆数」の表がP.433－P.434があります。循環小数についてはP.14とP.317に書かれています。

$\boxed{\text{P.14}}$　$0.8\dot{3} = 0.8+0.0\dot{3} = \frac{8}{10}+\frac{1}{10}\times 0.\dot{3} = \frac{8}{10}+\frac{1}{10}\times\frac{3}{9} = \frac{75}{90} = \frac{5}{6}$

ロバートソン（J. Robertson, 1712－1776）による方法と呼ばれる.

混循環小数を分数に直す方法が紹介されています。

$\boxed{\text{P. 317}}$ ディオファントス方程式の一つの応用として、分数を循環小数に直す方法が紹介されています。 1/91 を例とします。

$91 = 7 \times 13$ と素因数分解できることに注目して

$\frac{1}{91} = \frac{a}{7} + \frac{b}{13}$ と分解する。 右辺を通分すると $\frac{13a+7b}{7 \times 13}$

となり a.b には $13a + 7b = 1$ になる関係が必要である。

係数 7.13 に互除法を適用すると

$13 = 1 \times 7 + 6 \Rightarrow 7 = 1 \times 6 + 1 \Rightarrow 6 = 6 \times 1$

より $(7, 13) = 1$ すなわち係数は互いに素であるので、方程式は整数解を有する。そこで、上の計算を逆向きにたどって

$1 = 7 - 1 \times 6 = 7 - 1 \times (13 - 1 \times 7) = 2 \times 7 - 1 \times 13$

より、整数解 $a = -1$, $b = 2$ を得る。

よって $\frac{1}{91} = -\frac{1}{7} + \frac{2}{13}$ と分解でき、

$7 - 1 \times (13 - \underline{\underline{1 \times 7}})$

2×7 (+7)　　(+7) −1×13

差は同じ

$\frac{1}{91} = -1 \times (0.\dot{1}4285\dot{7}) + 2 \times (0.\dot{0}7692\dot{3}) = 0.\dot{0}1098\dot{9}$

を得る。

分母が合成数の場合の循環小数を素数の場合の循環小数を利用して求める方法です。

レポート 2004.7.19「研究レポート」A-4 わり算〔6進法での 1÷8の場合〕について 再度、考えました。

1÷8とした理由は $8=2\times2\times2=2^3$ で $6=2\times3$ となる6進法では小数点以下3桁で割り切れるからです。

6進法での計算による方法でまず考えます。

6進法で8は12となり2桁になります。そこで $8=4\times2$ と考え2段階の計算をします。

```
      0.13              0.043
 4 ) 1              2 ) 0.13
     10                -12
     -4                  10
      20                -10
     -20                   0
       0
```

レポート(2022・2.3)の表紙
6進法のかけ算の表を使いました。

12の倍数の表を先に作っておく方法

(レポート2015.4.10)に 1÷23の例があります。

```
        0.043
 12 )  1
       100
       -52
         40
```

$0\times12=0$

$1\times12=12$

$2\times12=24$

$3\times12=40$

$4\times12=52$

$5\times12=104$

0.043 の正しいことの説明

$$\frac{0}{6^1}+\frac{4}{6^2}+\frac{3}{6^3}=\frac{24+3}{6^3}=\frac{27}{6^3}=\frac{3^3}{6^3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$$

位数を求める計算と同じでした。

レポート 2004.7.19の計算方法

6進法では8は12と表記しますが、10進法表記の8をそのまま使います。計算は10進法で行ないます。

```
        0. 0  4  3
8 ) 1
   -0
    1          (×6)
      6
     -0
      6        (×6)
      3  6
   -  3  2
         4     (×6)
         2  4
       - 2  4
            0
```

$\frac{a}{6^1}+\frac{b}{6^2}+\frac{c}{6^3}+\cdots$

という形に分解したい

10進法の 1÷7と くらべると ちがいが よくわかります。

```
       0. 1 4 2
7 ) 1
   -0
    1          (×10)
    1 0
   -  7
      3        (×10)
      3 0
    - 2 8
        2 0    (×10)
      - 1 4
          6
```

0をつけ加えるのではなく10倍している。

0.1×1　0.01×4　0.001×2

0.142……とは

$\frac{1}{10^1}+\frac{4}{10^2}+\frac{2}{10^3}+$

林　利英