

武田利一様

日差しに春を感じます。

① レポート (2012. 3. 11 「平方数の表づくりと観察」) とレポート (2012. 5. 27 「M乗数の表の観察」) を作り直しかけました。

① は 「Nが1から100までの平方数の表づくり」というテーマにして Nが51から100までを作る問題として使えると思いました。

$$(50 + a)^2 = 2500 + 100a + a^2$$

|    |                                      |    |    |
|----|--------------------------------------|----|----|
| 49 | $(50 - 1)^2 = 2500 - 100 + 1 = 2401$ | 24 | 01 |
| 51 | $(50 + 1)^2 = 2500 + 100 + 1 = 2601$ | 26 | 01 |
| 52 | $(50 + 2)^2 = 2500 + 200 + 4 = 2704$ | 27 | 04 |

$$(75 + a)^2 = 5625 + 150a + a^2$$

|    |                                      |    |    |
|----|--------------------------------------|----|----|
| 74 | $(75 - 1)^2 = 5625 - 150 + 1 = 5476$ | 54 | 76 |
| 76 | $(75 + 1)^2 = 5625 + 150 + 1 = 5776$ | 57 | 76 |
| 72 | $(75 - 3)^2 = 5625 - 450 + 9 = 5184$ | 51 | 84 |
| 78 | $(75 + 3)^2 = 5625 + 450 + 9 = 6084$ | 60 | 84 |

N = 51 ~ N = 99 の下2桁は N = 1 ~ N = 49 の下2桁と同じになります。

百以上の位の増え方に注意すればよいことがわかります。

平方数の表の一の位は 5 を中心として対称になっているので立方数以上は

どうなっているのか知りたいと思って 「M乗数の表」 を作り調べました。

② は 「一の位の数字がきれいにならば時はどういう時か」というテーマにする  
と問題に化けます。

林 邦英

# 平方数の表づくり

[作り方]

(ア) 1つづつかけ算をする。

(イ)  $(N+1)^2 = N^2 + 2N + 1$  を利用する。

(ウ) 一の位, 十の位...の数字の並び方を調べる。

N = 1 より N = 10  
[九九を使って] (ア)

| N  | $N^2$ | 差を調べる。                         |
|----|-------|--------------------------------|
| 1  | 1     |                                |
| 2  | 4     | $3 = 2 + 1 = 2 \times 1 + 1$   |
| 3  | 9     | $5 = 4 + 1 = 2 \times 2 + 1$   |
| 4  | 16    | $7 = 6 + 1 = 2 \times 3 + 1$   |
| 5  | 25    | $9 = 8 + 1 = 2 \times 4 + 1$   |
| 6  | 36    | $11 = 10 + 1 = 2 \times 5 + 1$ |
| 7  | 49    | $13 = 12 + 1 = 2 \times 6 + 1$ |
| 8  | 64    | $15 = 14 + 1 = 2 \times 7 + 1$ |
| 9  | 81    | $17 = 16 + 1 = 2 \times 8 + 1$ |
| 10 | 100   | $19 = 18 + 1 = 2 \times 9 + 1$ |

$2N + 1$

N = 10 より N = 20  
[ $(N+1)^2 = N^2 + 2N + 1$ を使って] (イ)

| N  | $N^2$                |
|----|----------------------|
| 10 | 100                  |
| 11 | $100 + 20 + 1 = 121$ |
| 12 | $121 + 22 + 1 = 144$ |
| 13 | $144 + 24 + 1 = 169$ |
| 14 | $169 + 26 + 1 = 196$ |
| 15 | $196 + 28 + 1 = 225$ |
| 16 | $225 + 30 + 1 = 256$ |
| 17 | $256 + 32 + 1 = 289$ |
| 18 | $289 + 34 + 1 = 324$ |
| 19 | $324 + 36 + 1 = 361$ |
| 20 | $361 + 38 + 1 = 400$ |

N = 20 より N = 30

| N  | $N^2$            |
|----|------------------|
| 20 | 400              |
| 21 | $400 + 41 = 441$ |
| 22 | $441 + 43 = 484$ |
| 23 | $484 + 45 = 529$ |
| 24 | $529 + 47 = 576$ |
| 25 | $576 + 49 = 625$ |
| 26 | $625 + 51 = 676$ |
| 27 | $676 + 53 = 729$ |
| 28 | $729 + 55 = 784$ |
| 29 | $784 + 57 = 841$ |
| 30 | $841 + 59 = 900$ |

[数字の並び方を調べる] (ウ)

[一の位の数字の並び方]

| N | 0  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5 | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
|---|----|----|----|----|----|---|----|----|----|----|----|
| a | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | +1 | +2 | +3 | +4 | +5 |

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩

⑤ を中心にして左右対称になっている。

$$(5+a)^2 = 25 + 10a + a^2$$

| N | a  |                    |
|---|----|--------------------|
| 3 | -2 | $25 - 20 + 4 = 9$  |
| 7 | +2 | $25 + 20 + 4 = 49$ |

[下2桁の数字の並び方]

| N | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 (N) |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|--------|
| a | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0  | +1 | +2 | +3 | +4 | +5 (a) |

①② ③④ ⑤⑥ ⑦⑧ ⑨⑩ ⑪⑫

⑤ を中心にして左右対称になっている。

$$(25+a)^2 = 625 + 50a + a^2$$

| N  | a  |                       |
|----|----|-----------------------|
| 22 | -3 | $625 - 150 + 9 = 484$ |
| 28 | +3 | $625 + 150 + 9 = 784$ |

$784 - 484 = 150 \times 2 = 300$   
差は300になり下2桁は同じ。

N = 20 より N = 30  
[一の位の並び方を使って]

| N  | 一の位が①の時は十の位を1つ大きくする。 |    |   |   |
|----|----------------------|----|---|---|
| 20 | $20 \times 2 = 40$   | 40 | 0 | ⊕ |
| 21 |                      | 44 | 1 | ⊕ |
| 22 |                      | 48 | 4 | ⊕ |
| 23 |                      | 52 | 9 | ⊕ |
| 24 |                      | 57 | 6 | ⊖ |
| 25 | $25 \times 2 = 50$   | 62 | 5 | ⊕ |
| 26 |                      | 67 | 6 | ⊕ |
| 27 |                      | 72 | 9 | ⊖ |
| 28 |                      | 78 | 4 | ⊖ |
| 29 |                      | 84 | 1 | ⊖ |
| 30 | $30 \times 2 = 60$   | 90 | 0 | ⊖ |

N = 30 より N = 40  
[下2桁の並び方を使って]

| N  | (N=10よりN=20の表を使います。) |    |   |
|----|----------------------|----|---|
| 30 | 9                    | 00 | ⊕ |
| 31 | 9                    | 61 | ⊖ |
| 32 | 10                   | 24 | ⊕ |
| 33 | 10                   | 89 | ⊖ |
| 34 | 11                   | 56 | ⊖ |
| 35 | 12                   | 25 | ⊖ |
| 36 | 12                   | 96 | ⊕ |
| 37 | 13                   | 69 | ⊖ |
| 38 | 14                   | 44 | ⊖ |
| 39 | 15                   | 21 | ⊖ |
| 40 | 16                   | 00 | ⊖ |

↑ N=10  
Nが50まで。 ⊖ の時に1つ加える。

M乗数の表

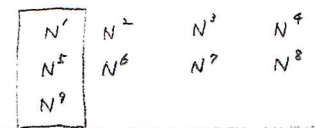
| $N^1$ | $N^2$ | $N^3$ | $N^4$ | $N^5$  | $N^6$   | $N^7$    | $N^8$     |
|-------|-------|-------|-------|--------|---------|----------|-----------|
| 1     | 1     | 1     | 1     | 1      | 1       | 1        | 1         |
| 2     | 4     | 8     | 16    | 32     | 64      | 128      | 256       |
| 3     | 9     | 27    | 81    | 243    | 729     | 2187     | 6561      |
| 4     | 16    | 64    | 256   | 1024   | 4096    | 16384    | 65536     |
| 5     | 25    | 125   | 625   | 3125   | 15625   | 78125    | 390625    |
| 6     | 36    | 216   | 1296  | 7776   | 46656   | 279936   | 1679616   |
| 7     | 49    | 343   | 2401  | 16807  | 117649  | 823543   | 5764801   |
| 8     | 64    | 512   | 4096  | 32768  | 262144  | 2097152  | 16777216  |
| 9     | 81    | 729   | 6561  | 59049  | 531441  | 4782969  | 43046721  |
| 10    | 100   | 1000  | 10000 | 100000 | 1000000 | 10000000 | 100000000 |

| $N^9$ | $N^{10}$   | $N^{11}$    | $N^{12}$     | $N^{13}$      |
|-------|------------|-------------|--------------|---------------|
| 1     | 1          | 1           | 1            | 1             |
| 2     | 512        | 1024        | 2048         | 4096          |
| 3     | 19683      | 59049       | 177147       | 531441        |
| 4     | 262144     | 1048576     | 4194304      | 16777216      |
| 5     | 1953125    | 9765625     | 48828125     | 244140625     |
| 6     | 10077696   | 60466176    | 362797056    | 2176782336    |
| 7     | 40353607   | 282475249   | 1977326743   | 13841287201   |
| 8     | 134217728  | 1073741824  | 8589934592   | 68719476736   |
| 9     | 387420489  | 3486784401  | 31381059609  | 282429536481  |
| 10    | 1000000000 | 10000000000 | 100000000000 | 1000000000000 |

| $N^{14}$ | $N^{15}$       | $N^{16}$        | $N^{17}$         |
|----------|----------------|-----------------|------------------|
| 1        | 1              | 1               | 1                |
| 2        | 16384          | 32768           | 65536            |
| 3        | 4782969        | 14348907        | 43046721         |
| 4        | 268435456      | 1073741824      | 4294967296       |
| 5        | 6103515625     | 30517578125     | 152587890625     |
| 6        | 78364164096    | 470184984576    | 2821109907456    |
| 7        | 678223072849   | 4747561509943   | 33232930569601   |
| 8        | 4398046511104  | 35184372088832  | 281974976710656  |
| 9        | 22876792454961 | 205891132094649 | 1853020188851841 |
| 10       | 10000000000000 | 100000000000000 | 1000000000000000 |

M乗数の表

| $N^1$ | $N^2$ | $N^3$ | $N^4$ | $N^5$  | $N^6$   | $N^7$    | $N^8$     | $N^9$      |
|-------|-------|-------|-------|--------|---------|----------|-----------|------------|
| 1     | 1     | 1     | 1     | 1      | 1       | 1        | 1         | 1          |
| 2     | 4     | 8     | 16    | 32     | 64      | 128      | 256       | 512        |
| 3     | 9     | 27    | 81    | 243    | 729     | 2187     | 6561      | 19683      |
| 4     | 16    | 64    | 256   | 1024   | 4096    | 16384    | 65536     | 262144     |
| 5     | 25    | 125   | 625   | 3125   | 15625   | 78125    | 390625    | 1953125    |
| 6     | 36    | 216   | 1296  | 7776   | 46656   | 279936   | 1679616   | 10077696   |
| 7     | 49    | 343   | 2401  | 16807  | 117649  | 823543   | 5764801   | 40353607   |
| 8     | 64    | 512   | 4096  | 32768  | 262144  | 2097152  | 16777216  | 134217728  |
| 9     | 81    | 729   | 6561  | 59049  | 531441  | 4782969  | 43046721  | 387420489  |
| 10    | 100   | 1000  | 10000 | 100000 | 1000000 | 10000000 | 100000000 | 1000000000 |



1の位を調べると奇数乗では5を中心として和が10に、偶数乗では同じになることがわかります。Nを4で割ったあまりを4つのグループに分けることができました。

1の位は10で割ったあまりなので10以外の数字で割って調べてみました。

$N^3$ の6で割ったあまりを調べました。

| ① | ② | ③  | ④  | ⑤   | ⑥   | ⑦   | ⑧   | ⑨   | ⑩    |
|---|---|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 216 | 343 | 512 | 729 | 1000 |
| 1 | 2 | 3  | 4  | 5   | 0   | 1   | 2   | 3   | 4    |

$11^3 = 1331 = 221 \times 6 + 5$

0-1-2-3-4-5ときれいに数字がならびます。

$N^5$ の6で割ったあまりを調べました。

| ① | ②  | ③   | ④    | ⑤    | ⑥    | ⑦     | ⑧     | ⑨     | ⑩      |
|---|----|-----|------|------|------|-------|-------|-------|--------|
| 1 | 32 | 243 | 1024 | 3125 | 7776 | 16807 | 32768 | 59049 | 100000 |
| 1 | 2  | 3   | 4    | 5    | 0    | 1     | 2     | 3     | 4      |