2022. 1.23

武田 利一 様

おいそがしい日々をすごされていると思います。寒い日が続きます。お体に気をつけて下さい。

平方根を求める考え方あれやこれや のP.1－P.2 に少し書きこみをしました。ニュートン・ラフソン法とハレー法をつけ加え、1次収束～3次収束のちがいがわかるようにしました。テイラー展開のアイデアの始まりを 4乗数の階差数列の分析を使って説明できるのではと考えたきっかけは 中村幸四郎先生の「微分積分学のはじめ（ライプニッツの場合）」の文章を読んだことです。「数学セミナー 12-72 臨時増刊 数学100の発見」の P.65の (1)～(5) の部分です。ぬき書きします。

「(1) 当時存在していた無限小幾何学から、記号数学の一種である無限小解析を創り出し、(2) 無限小を処理する特有な方法として「固有三角形の方法」を確立し、(3) その解析学の中心概念として「関数」というものを把え、(4)「微分」の概念の前身として「差分」の概念を確定し、(5) 当時すでに十分知られていた無限級数の1つの特別な場合として、いわゆる「テイラー展開」をとらえる」と書いております。私は（4）の「差分」に着目しました。

差分とは 階差のことです。 20年前のことを思い出しました。微分と差分が 4乗数の階差数列の中にありました。階差数列の一般式を求める場合 第1項は微分をくり返すことで求めることができます。 そして、M－4－1 第1階差数列は $(N+1)^4 - N^4$ で求めることができます。この具体的な

事実を「(N+1)とする増加分を微分をくり返した数値を利用して表現することができる。」と昨年の秋に言いかえることができました。昨年の学習の一番の成果だったと考えています。二番目は数学の歴史を改善の積み重ねであるとする考え方をもつことができたことです。レポート 2020.12.25「1年を振り返って」のP.2「㋐㋑㋒㋓の考え方は全体として1つのものでどれもが大切だと思いました。」とする考え方を発展させることができました。階差を使って数列の一般項を求める方法で数列の0項に着目しない方法とする方法とのちがいについて考えたことは有益でした。ニュートンさんの補間法のアイデアはとてもすぐれていることをまず確かめました。私は数学事典を調べ（1990年代のことです。）S法よりもすぐれていることを知りました。（2018年のことです。）ネスティングという方法を使うと計算が楽になることをあとになって知りました。もし知っていたら、階差0項数列を使う組立除法の方法なんて考えようともしなかったと思います。私が数学の学習を本格的に始めるきっかけであり、今でも原動力であり続けています。

本年もよろしくお願いします。

林　邦英

平方根を求める考え方

ニュートン・ラフソン法 $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ ①と同等 2次収束

① $\frac{a+b}{2} > \sqrt{a\cdot b} > \frac{2\cdot a\cdot b}{a+b}$

$\frac{4+\frac{19}{4}}{2} = \frac{35}{8}$ $\quad \frac{\frac{35}{8}+\frac{19\times 8}{35}}{2} = \frac{2441}{560}$

$4^2 - 19\times 1^2 = -3$

$35^2 - 19\times 8^2 = 9$

$2441^2 - 19\times 560^2 = 81$

$\left(\frac{35}{8} = 4+\frac{3}{8}\right)$ $\quad 19 = 4\times\frac{19}{4}$ $\quad 19 = 4^2+3$

② $A + \frac{x}{2A} > \sqrt{A^2+x} > A + \frac{x}{2A+1}$

A	1	2	3	4	5
	1	4	9	16	25
2A+1	3	5	7	9	

$\left(4+\frac{3}{8}\right)^2 = 19.14$ $\quad \left(4+\frac{3}{9}\right)^2 = 18.78$

$4+\frac{x}{8+\frac{x}{9}}$ $\quad 16 < 4^2+x < 25$ $\quad 0 < x < 9$

③ $\sqrt{A^2+x} < A + \frac{x}{2A+\frac{x}{2A+1}}$

$6+\frac{x}{12+\frac{x}{13}}$ $\quad 36 < 6^2+x < 49$ $\quad 0 < x < 13$

$4+\frac{3}{8+\frac{3}{9}} = \frac{109}{25}$ $\quad \left(\frac{109}{25}\right)^2 = 19.01$

④ $\sqrt{A^2+x} = A + \frac{x}{2A+\frac{x}{2A+\frac{x}{2A+}}}$

$\sqrt{1+x} \fallingdotseq 1+\frac{x}{2+\frac{x}{2}} = 1+\frac{2x}{4+x}$

双曲線近似法

$\frac{4}{1} \to 4+\frac{3}{8+\frac{3}{8+\frac{3}{8+\frac{3}{8+}}}}$ 1次収束

$\frac{35}{8}$ $\quad \frac{292}{67}$ $\quad \frac{2441}{560}$ $\quad \frac{20404}{4681}$

$292^2 - 19\times 67^2 = -27$

$20404^2 - 19\times 4681^2 = -243$

最良近似分数

⑤ $\sqrt{19} \fallingdotseq \frac{170}{39}$ $\quad 170^2 - 19\times 39^2 = 1$ $\quad 57799^2 - 19\times 13260^2 = 1$

$\frac{\frac{170}{39}+\frac{19\times 39}{170}}{2} = \frac{57799}{13260}$

$\sqrt{19} = 4 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{8+\frac{1}{2+}}}}}}}$

$\frac{9}{2} \to 2+$ $\quad 9^2 - 19\times 2^2 = 5$

$\frac{13}{3} \to 1+$ $\quad 13^2 - 19\times 3^2 = -2$

$\frac{48}{11} \to 3+$ $\quad 48^2 - 19\times 11^2 = 5$

$\frac{61}{14} \to 1+$ $\quad 61^2 - 19\times 14^2 = -3$

$\frac{170}{39}$

4 2 1 3 1 2 8

4×2=8

周期の発見

$X^{\frac{1}{N}} \fallingdotseq \frac{(N+1)X+(N-1)}{(N-1)X+(N+1)}$ $\quad X^{\frac{1}{2}} \fallingdotseq \frac{3X+1}{X+3}$

ハレー法 3次収束

① $\frac{a+b}{2} > \sqrt{a\cdot b} > \frac{2\cdot a\cdot b}{a+b}$ 両辺を加える ①' $\frac{a+b+2\cdot a\cdot b}{2+a+b} < \sqrt{a\cdot b}$

$(a\cdot b \to 1)$

$\frac{21}{20} = \frac{\frac{10}{10}+\frac{11}{10}}{2} > \sqrt{\frac{10}{10}\cdot\frac{11}{10}} > \frac{20\cdot 11}{21\cdot 10} = \frac{22}{21}$ $\quad \frac{a+b+2\cdot 1}{2+a+b} = 1 = \sqrt{1}$

$\frac{21+22}{20+21} = \frac{43}{41} = 1+\frac{2}{41}$

$\sqrt{1+0.1} > 1+\frac{2\times 0.1}{4+0.1} = 1+\frac{2}{41}$

$\sqrt{1+x} > 1+\frac{2x}{4+x} = 1+\frac{x}{2+\frac{x}{2}}$

③' $A+\frac{x}{2A+\frac{x}{2A}} < \sqrt{A^2+x} < A+\frac{x}{2A+\frac{x}{2A+1}}$

$\frac{11}{10}$ $\quad 11+10=21$ $\quad 21\times 2=42$ $\quad 42^{+1}_{-1}$ $\quad \frac{43}{41}$ $\quad 11-10=1$

$\frac{43}{41} + \frac{1}{10\times 2\times 43\times 41}$

$\frac{13}{10}$ $\quad 13+10=23$ $\quad 23\times 2=46$ $\quad 46^{+3}_{-3}$ $\quad \frac{49}{43}$ $\quad 13-10=3$

$\frac{49}{43} + \frac{27}{10\times 2\times 49\times 43}$ $\quad 3^3=27$

③'' $A+\frac{x}{2A+\frac{x}{2A+\frac{x}{2A}}} > \sqrt{A^2+x} > A+\frac{x}{2A+\frac{x}{2A+\frac{x}{2A+1}}}$

$\sqrt{19} = \sqrt{4^2+3}$

$\frac{1}{0}$ $\quad \frac{4}{1}$ $\quad$ 3/8 $\frac{3+32}{0+8} = \frac{35}{8}$ $\quad$ 3/8 $\frac{12+280}{3+64} = \frac{292}{67}$ $\quad$ 3/8 $\frac{105+2336}{24+536} = \frac{2441}{560}$ (19.0002‥) $\quad$ 3/9 $\frac{105+2628}{24+603} = \frac{2733}{627}$ (18.9995‥)

④ $\sqrt{A^2+x} = A+\frac{x}{2A+\frac{x}{2A+\frac{x}{2A+\frac{x}{2A+\frac{x}{2A+\frac{x}{2A+}}}}}}$

$\sqrt{2} = 1+\sqrt{2}-1$

$= 1+\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1}$

$= 1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}$

$= 1+\frac{1}{2+\sqrt{2}-1}$

$\sqrt{7} = 2+\sqrt{7}-2$

$= 2+\frac{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}{\sqrt{7}+2}$

$= 2+\frac{3}{\sqrt{7}+2}$

$= 2+\frac{3}{4+\sqrt{7}-2}$