

2022. 1. 23

武田 利一様

お気持ち悪い日々をすごされていると思います。寒い日が続きます。お体に気を付けて下さい。

平方根を求める考え方あれやこれやの P.1 - P.2 に少し書き込みをしました。

ニュートン・ラフソン法とハレー法をつけ加え、1次収束 ~ 3次収束のちがいがわかるようにしました。テイラー展開のアイデアの始まりを4乗数の階差数列の分析を使って説明できるのではと考えたきっかけは中村幸四郎先生の「微分積分学のはじめ(ライプニッツの場合)」の文章を読んだことです。「数学セミナー 12-72 臨時増刊 数学100の発見」の P.65 の(1) ~ (5)の部分です。ぬき書きます。

「(1) 当時存在していた無限小幾何学から、記号数学の一種である無限小解析を創り出し、(2) 無限小を処理する特有な方法として「固有三角形の方法」を確立し、(3) その解析学の中心概念として「関数」というものを捉え、(4) 「微分」の概念の前身として「差分」の概念を確定し、(5) 当時すでに十分知られていた無限級数の1つの特別な場合として、いわゆる「テイラー展開」をとらえる」と書いてあります。私は(4)の「差分」に着目しました。

差分とは階差のことです。20年前のことを思い出しました。微分と差分が4乗数の階差数列の中にあいました。階差数列の一般式を求める場合が1項は微分をくり返すことと求めおけることができます。そして、 $M-4-1$  の1階差数列は  $(N+1)^4 - N^4$  を求めることができます。この具体的な

事実を「 $(N+1)$ とする増加分を微分をくり返した数値を利用して表現  
 することが出来る。」と 昨年の秋に言いかえることが出来ました。昨年の学習の  
 一番の成果だったと考えています。二番目は 数学の歴史を改善の積み  
 重ねであるとする考えをもちつことができたことです。レポート 2020.12.25  
 「1年を振り返って」のp.2 「㊶㊷㊸㊹の考え方は全体として1  
 つのものだとどれもが大切だと思いました。」とする考えを発展させる  
 ことが出来ました。階差を使って数列の一般項を求める方法を数列の  
 0項に着目しない方法とする方法とのちがいについて考えたことは有益  
 でした。ニュートンさんの補間法のアイデアはとてむすぐれていることを  
 ます1990年代のことです。確かめました。私は 数学事典を調べ「法おれすぐれていることを知  
 りました。2018年のことです。ネスティングという方法を使うと計算が楽になることをあとになって  
 知りました。もし知っていたら、階差0項数列を使う組立除法の方法  
 なんて考えようとしなかつたと思います。私が数学の学習を本格的  
 に始めるきっかけであり、今でも原動力であり続けています。

今年もよろしくお願ひします。

林 邦英

平方根を求めろ  
考え方

=2-トン・ラフソン法  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$   
 $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$  ①と同等 (2次収束)

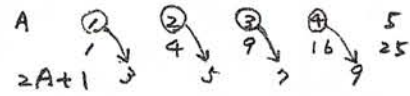
①  $\frac{a+b}{2} > \sqrt{a \cdot b} > \frac{2 \cdot a \cdot b}{a+b}$

$(\frac{35}{8} = 4 + \frac{3}{8})$   $19 = 4 \times \frac{19}{4}$   
 $19 = 4^2 + 3$

$4 + \frac{19}{4} = \frac{35}{4}$   $\frac{35}{8} + \frac{19 \times 8}{35} = \frac{2441}{560}$   
 $4^2 - 19 \times 1^2 = -3$   
 $35^2 - 19 \times 8^2 = 9$   
 $2441^2 - 19 \times 560^2 = 81$

②  $A + \frac{x}{2A} > \sqrt{A^2+x} > A + \frac{x}{2A+1}$

$(4 + \frac{3}{8})^2 = 19.14$   $(4 + \frac{3}{9})^2 = 18.78$



$4 + \frac{x}{8 + \frac{x}{9}}$   $16 < 4^2 + x < 25$   
 $0 < x < 9$

③  $\sqrt{A^2+x} < A + \frac{x}{2A + \frac{x}{2A+1}}$

$6 + \frac{x}{12 + \frac{x}{13}}$   $36 < 6^2 + x < 49$   
 $0 < x < 13$

$4 + \frac{3}{8 + \frac{3}{9}} = \frac{109}{25}$   $(\frac{109}{25})^2 = 19.01$

④  $\sqrt{A^2+x} = A + \frac{x}{2A + \frac{x}{2A + \frac{x}{2A + \dots}}}$

$\frac{4}{1} \rightarrow 4 + \frac{3}{8 + \frac{3}{8 + \frac{3}{8 + \dots}}}$   
 $\frac{35}{8} \rightarrow \frac{292}{67} \rightarrow \frac{2441}{560} \rightarrow \frac{20409}{4681}$  (1次収束)

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2 + \frac{x}{2}} = 1 + \frac{2x}{4+x}$   
 双曲線近似法

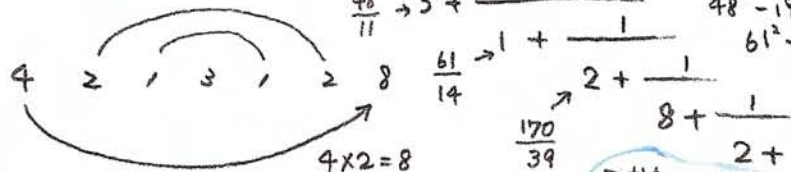
$29^2 - 19 \times 67^2 = -27$   
 $20409^2 - 19 \times 4681^2 = -243$   
 最良近似分数

⑤  $\sqrt{19} \approx \frac{170}{39}$

$170^2 - 19 \times 39^2 = 1$   
 $57799^2 - 19 \times 13260^2 = 1$   
 $\frac{170}{39} + \frac{19 \times 39}{170} = \frac{57799}{13260}$

$\sqrt{19} = 4 + \frac{1}{\frac{9}{2} \rightarrow 2 + \frac{1}{\frac{13}{3} \rightarrow 1 + \frac{1}{\frac{48}{11} \rightarrow 3 + \frac{1}{\frac{61}{14} \rightarrow 1 + \frac{1}{\frac{170}{39} \rightarrow 2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}$

$9^2 - 19 \times 2^2 = 5$   
 $13^2 - 19 \times 3^2 = -2$   
 $48^2 - 19 \times 11^2 = 5$   
 $61^2 - 19 \times 14^2 = -3$



周期の発見

$x^{\frac{1}{N}} \approx \frac{(N+1)x + (N-1)}{(N-1)x + (N+1)}$

$x^{\frac{1}{2}} \approx \frac{3x+1}{x+3}$

ハル-法  
3次収束

①  $\frac{a+b}{2} > \sqrt{a \cdot b} > \frac{2 \cdot a \cdot b}{a+b}$  両辺を加えよ

$\frac{a+b+2 \cdot a \cdot b}{2+a+b} < \sqrt{a \cdot b}$  ( $a \cdot b \rightarrow 1$ )

$\frac{21}{20} = \frac{10+11}{2} > \sqrt{\frac{10 \cdot 11}{20}} > \frac{20 \cdot 11}{21 \cdot 20} = \frac{22}{21}$

$\frac{a+b+2 \cdot 1}{2+a+b} = 1 = \sqrt{1}$

$\frac{21+22}{20+21} = \frac{43}{41} = 1 + \frac{2}{41}$

$\sqrt{1+0.1} > 1 + \frac{2 \times 0.1}{4+0.1} = 1 + \frac{2}{41}$

$\sqrt{1+x} > 1 + \frac{2x}{4+x} = 1 + \frac{x}{2 + \frac{x}{2}}$

②  $A + \frac{x}{2A + \frac{x}{2A}} < \sqrt{A^2+x} < A + \frac{x}{2A + \frac{x}{2A+1}}$

$(\frac{11}{10})$   $11+10=21$   $21 \times 2 = 42$   $42 - 10 = 32$   $32 - 10 = 22$   $22 - 10 = 12$   $12 - 10 = 2$   
 $\frac{43}{41} + \frac{1}{10 \times 2 \times 43 \times 41}$   
 $(\frac{13}{10})$   $13+10=23$   $23 \times 2 = 46$   $46 - 10 = 36$   $36 - 10 = 26$   $26 - 10 = 16$   $16 - 10 = 6$   $6 - 10 = -4$   
 $\frac{49}{43} + \frac{27}{10 \times 2 \times 49 \times 43}$   $3^3 = 27$

③  $A + \frac{x}{2A + \frac{x}{2A + \frac{x}{2A + \dots}}} > \sqrt{A^2+x} > A + \frac{x}{2A + \frac{x}{2A + \frac{x}{2A + \dots}}}$

$\frac{1}{0} \frac{4}{1} \frac{3+32}{0+8} = \frac{35}{8}$   $\frac{12+280}{3+69} = \frac{292}{72}$   $\frac{105+2336}{24+536} = \frac{2441}{560}$   $\frac{105+2628}{24+603} = \frac{2733}{627}$

④  $\sqrt{A^2+x} = A + \frac{x}{2A + \frac{x}{2A + \frac{x}{2A + \dots}}}$

$\sqrt{7} = 2 + \sqrt{7} - 2$   
 $= 2 + \frac{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}{\sqrt{7}+2}$   
 $= 2 + \frac{3}{\sqrt{7}+2}$   
 $= 2 + \frac{3}{4 + \sqrt{7} - 2}$

$\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} - 1$   
 $= 1 + \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1}$   
 $= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$   
 $= 1 + \frac{1}{2 + \sqrt{2} - 1}$