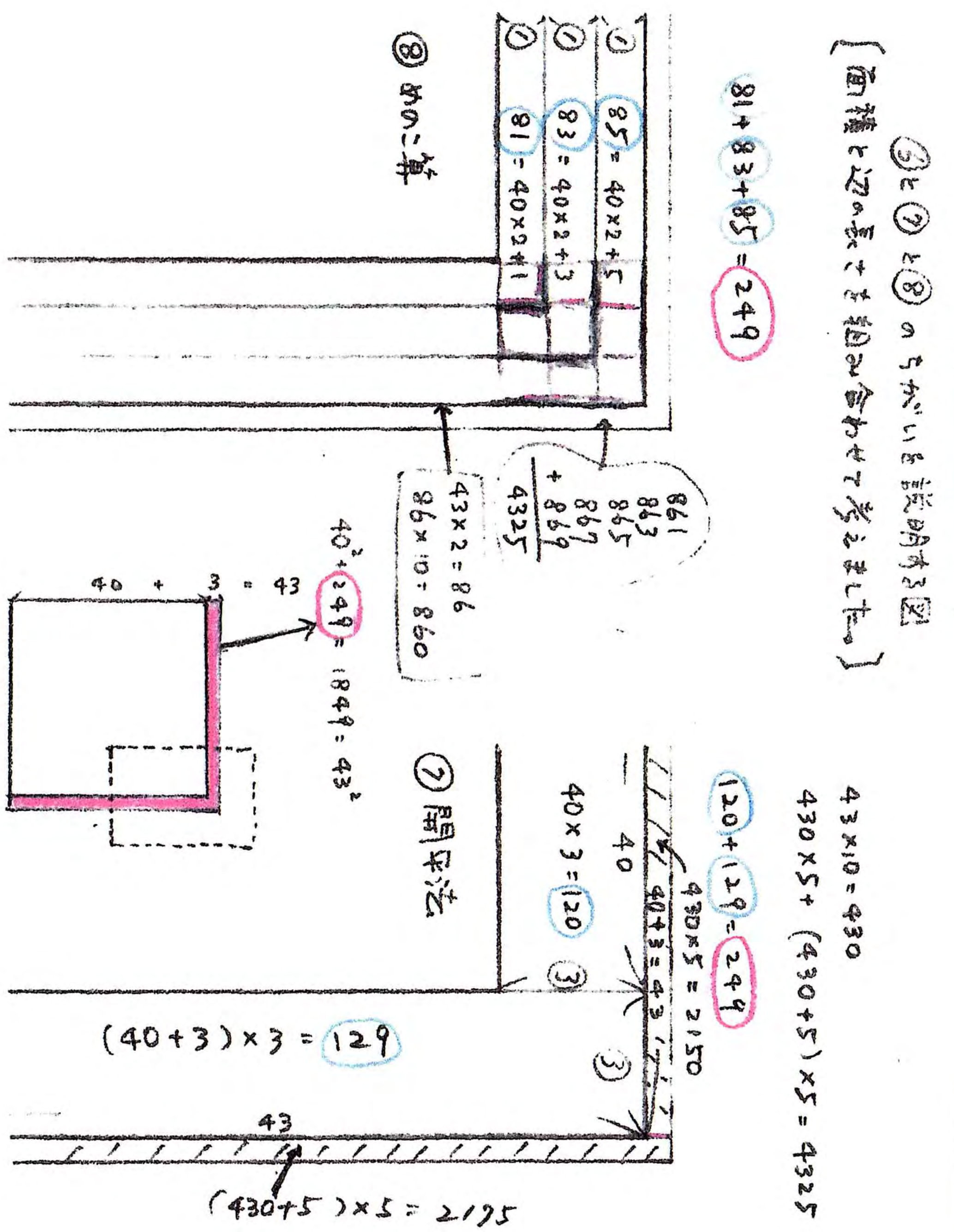
2021.11.13

武田 利一 様

おいそがしい日々をすごされていると思います。秋も深まってきました。これから寒くなりますね。お体に気をつけて下さい。郵便局では年賀状の販売が始まりました。少し早いと思いますが、今年1年をふり返ってみました。ニュートン補間法に関する2つのテーマについて考えました。1つ目は数列の一般項を求める考え方で、階差の0項を使う場合と使わない場合のちがいについて確かめました。ニュートンさんの階差の0項に着目する考え方がすぐれたものであることがわかりました。また式の形が一般の二項定理にとてもよく似ていることに気がつきました。2つ目は階差の0項の使い方です。私はニュートンさんとは異なる使い方をします。階差数列の一般式の研究の使い方がやっとわかりました。有限のテイラー展開の説明に使うことができました。私は今とりあげた3つの考え方すべてに意味があると考えています。数学の歴史は改善の積み重ねだと考えるからです。冪和の公式を求める考え方ではSTEP 1 等差数列の性質を利用して自然数の数列の和を求める考え方から始めました。メインとなるSTEP 4の始まりは、和の形の公式の第4項の観察でした。平方根を求める考え方「九九の表の観察」から「テーラ展開」までの冊子を作りました。改善の積み重ねに注意しながら作ったものです。もしよろしければ御意見をお知らせ下さい。

林 邦英



平方根を求める考え方

「九九の表の観察」から「テーラ展開」まで

⑤ $\sqrt{19}$ の観察（12桁の電卓を使って）

19 √			4. 3588989435 4
−	4	=	0. 3588989435 4
÷		=	2. 7862996478 5
−	2	=	0. 7862996478 5
÷		=	1. 2717797887
−	1	=	0. 2717797887
÷		=	3. 6794494718 8
−	3	=	0. 6794494718 8
÷		=	1. 4717797884 7
−	1	=	0. 4717797884 7
÷		=	2. 1196329822 5
−	2	=	0. 1196329822 5
÷		=	8. 3588988687 9
−	8	=	0. 3588988687 9

平方根を求める考え方 あれやこれや

2020 7 19

（0番） 始まり「九九の表の観察」

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

㋐

自然数の平方数を赤で示しました。左上より右下へ

自然数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
平方数	1	4	9	16	25	36	49	64	81

自然数の平方数が左上より右下にならびます。平方数の平方根は自然数です。平方数ではない数の平方根は？ このような数へあることを認めることから始まります。

$\sqrt{19}$ の場合

$19 = 4^2 + 3$

$16 < 19 < 25$
$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$
$4 < \sqrt{19} < 5$

$\sqrt{19}$ は4よりも大きく5よりも小さい数です。

$\sqrt{20}$ の場合

$20 = 4 \times 5$

$4 < \sqrt{20} < 5$
$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$
$16 < 20 < 25$

19との違いは $20 = 4 \times 5$ と分解することができることです。

$19 = 4^2 + 3$（和の形）と $20 = 4 \times 5$（積の形）という考え方のちがいは、平方根を求める考え方のちがいに発展します。前者は②の右辺 後者は①の左辺です。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

㋑

右上より左下へ数字を調べます。（青）

				5−5	6−4	7−3	8−2	9−1
				=0	=2	=4	=6	=8
9	16	21	24	25	24	21	16	9
1×9	2×8	3×7	4×6	5×5	6×4	7×3	8×2	9×1

$1+9 = 2+8 = 3+7 = 4+6 = 5+5 = 10$

2つの数字の和はすべて10になります。2つの数字の差が大きいほど2つの数字の積は小さくなります。2つの数字が同じ場合に2つの数字の積が一番大きくなります。
（$5 \times 5 = 25$）

次に視点を変えて、2つの数字の積を一定にした場合を調べます。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

㋒

九九の表にある8と18を緑の線でつないでみました。4と36に丸をつけました。数字の個数が4つと3つの場合です。
右上へ行くほど2つの数字の和は小さくなります。
2つの数字の差が小さいほど右上に近くなり、2つの数字が同じとき2つの数字の和が最小になることがわかります。

①の反復法は㋒の性質を利用したものです。①の方法では2つの数字の平均を求めています。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

㋓

平方数と右上の数字と左下の数字を四角で囲みました。15−16−15を使います。

$15 = 3 \times 5 \qquad 3+5 = 8$
$16 = 4 \times 4 \qquad 4+4 = 8$
$15 = 5 \times 3 \qquad 5+3 = 8$

$$4 = \frac{3+5}{2} > \sqrt{3 \times 5} = \sqrt{15}$$

①の左辺 $\dfrac{a+b}{2} > \sqrt{a \cdot b}$ の不等式ができました。

$48 = 6 \times 8 = 3 \times 4^2 \qquad 63 = 7 \times 9 = 7 \times 3^2 \qquad 72 = 8 \times 9 = 2 \times 6^2$

$\dfrac{6+8}{2} = \dfrac{14}{2} = 7 \qquad \dfrac{7+9}{2} = \dfrac{16}{2} = 8 \qquad \dfrac{8+9}{2} = \dfrac{17}{2}$

$\dfrac{7}{4} = 1 + \dfrac{3}{4} > \sqrt{3} \qquad \dfrac{8}{3} = 2 + \dfrac{2}{3} > \sqrt{7} \qquad \dfrac{17}{2 \times 6} = \dfrac{17}{12} = 1 + \dfrac{5}{12} > \sqrt{2}$

（1.75）　（2.67）　（1.4167）

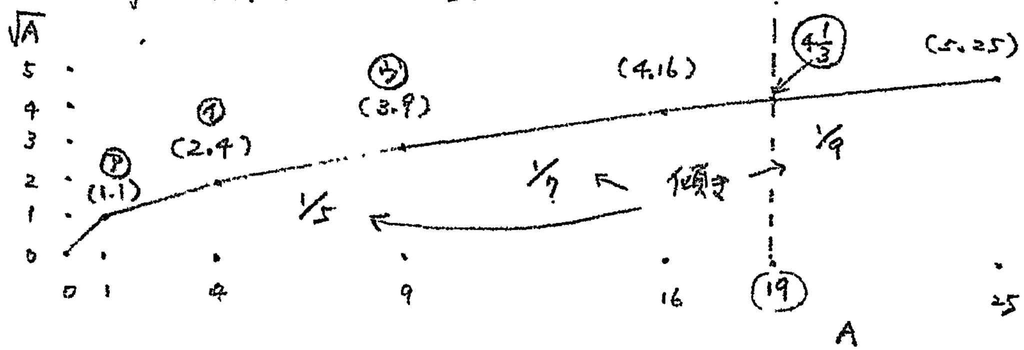
㋔ 平方数の数列を調べます。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	← N
	1	4	9	16	25	36	49	64	81	
差	3	5	7	9	11	13	15	17		← 2N+1
	2	2	2	2	2	2	2			
	0	0	0	0	0	0				

2つのとなりあう数字の差（階差）を調べました。平方数どうしの差を2N+1の式で表わすことができることがわかります。この性質を利用する考え方が ②の右辺です。　$\sqrt{19}$ を例にします。

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
↓			↓						↓
4									5
+ 0/9	1/9	2/9	3/9	4/9	5/9	6/9	7/9	8/9	9/9

区間を直線でむすびます。



$19 = 16 + 3 = 4^2 + 3$　　　$4 \times 2 + 1 = 9$　　　$(ans^2 = 18.78)$

$\sqrt{19}$ は $4 + \frac{3}{9} = 4\frac{1}{3}$　⟶　$\sqrt{19} > 4\frac{1}{3}$

これを説明するには？
点㋐と点㋒を直線で結ぶと、
点①の下を通ります。

②の右辺　$\sqrt{A^2+x} > A + \frac{x}{2A+1}$
の不等式ができました。

〇　②　④　⑤　の方法は基本となる方法です。④から⑤が生まれました。①の方法は古いと思います。②の右辺（0-2）も同じくらい古いと思います。②の左辺がどこからきたのか、不思議でした。

①の左辺の数値分析だと考えました。

$20 = 4 \times \frac{20}{4}$ を使って　$\dfrac{4+\frac{20}{4}}{2} = \dfrac{36}{8} = 4 + \dfrac{4}{8}$　　$(8 = 4 \times 2)$

$28 = 5 \times \frac{28}{5}$ を使って　$\dfrac{5+\frac{28}{5}}{2} = \dfrac{53}{10} = 5 + \dfrac{3}{10}$　　$(10 = 5 \times 2)$

$20 = 16 + 4 = 4^2 + 4$　　$28 = 25 + 3 = 5^2 + 3$

このようにして ②の左辺が生まれたと考えました。

②と④の間に ③を入れました。区間近似式の研究が役に立ちました。③は②の改良です。左右の式を1つにしました。

③ $4 + \dfrac{x}{8 + \frac{x}{9}}$　　$\sqrt{4^2 + x}$ $(0 < x < 9)$　　② 左 $4 + \dfrac{x}{8}$　　② 右 $4 + \dfrac{x}{9}$

	x						
16	(0)	4+0/72	16.00	4+0/8	16.00	4+0/9	16.00
17	(1)	4+9/73	17.00	4+1/8	17.02	4+1/9	16.90
18	(2)	4+18/74	18.01	4+2/8	18.06	4+2/9	17.83
19	(3)	4+27/75	19.01	4+3/8	19.14	4+3/9	18.78
20	(4)	4+36/76	20.01	4+4/8	20.25	4+4/9	19.75
21	(5)	4+45/77	21.02	4+5/8	21.39	4+5/9	20.75
22	(6)	4+54/78	22.02	4+6/8	22.56	4+6/9	21.78
23	(7)	4+63/79	23.02	4+7/8	23.77	4+7/9	22.83
24	(8)	4+72/80	24.01	4+8/8	25.00	4+8/9	23.90
25	(9)	4+81/81	25.00	4+9/8	26.27	4+9/9	25.00

2021.5.16

おいそがしい日々をすごされていると思います。お体に気をつけて下さい。平方根に関するレポートを少し整理しました。2つ折に直しのりづけをすると冊子になります。表紙は⑤ $\sqrt{19}$の観察 になります。電卓を使って簡単にできる実験なので表紙にえらびました。裏表紙は⑥と⑦と⑧のちがいを説明する図になります。⑦開平法の計算原理を考える上で3つをひとくくりにした方がわかりやすいと思いました。正方形の辺と対角線の比を分数で表わすことができないことを古代ギリシャ人が証明しました。無理数の発見です。近似分数の研究は⑤の最良近似分数へと進みました。④までの近似分数の作り方とは考え方がちがいます。私は小数の形で求めた平方根の近似値を分数の形に直そうとした時に生まれた考え方ではないかと考えています。周期の発見はこの形の連分数にすることで可能になりました。小数の形の平方根の表を観察することで級数展開という考え方が生まれてきます。⑨と⑩をひとくくりにしました。

冪和の公式は積の形が先行しました。和の形での研究でベルヌーイ数が発見されました。分数の形と小数の形，積の形と和の形を組み合わせて考えることは大切なことだと体感しました。未知との出会いにおいて、異なる視点・多面的な物の見方考え方をもつ必要性を思いました。平方根を求める考え方あれやこれやを作った土台となる考え方です。

P.3 $\boxed{0-0}$ は平方数ではない数の平方根も数として認めることから始まります。 $\sqrt{20}$ と $\sqrt{19}$ を例とします。 20と19では数の分解方法がちがいます。

$20 = 4 \times 5$ 　 $19 = 4^2 + 3$ 　 積の形と和の形です。

$\boxed{0-1}$
$(4+5) \div 2 = 4.5$ 　 $4.5^2 = 20.25 > 20$ 　 20より大きくなります。

$\boxed{0-2}$
$4 + 3 \div (4 \times 2 + 1) = 4\frac{3}{9}$ 　 $(4\frac{3}{9})^2 = 18.\dot{7} < 19$ 　 19より小さくなります。

$\boxed{0-1}$ は P.1の①の左辺になります。

$\boxed{0-2}$ は P.1の②の右辺になります。

①はくり返すことで精度の良い数値を求めることができます。

$$\frac{4}{1}\ \overset{(-3)^1}{(-3)} \qquad \frac{35}{8}\ \overset{(-3)^2}{(+9)} \qquad \frac{2441}{560}\ \overset{(-3)^4}{(+81)}$$

( )内の数字は近似分数を分析する大切な視点です。

④では $\frac{4}{1}(-3)$ $\frac{35}{8}(+9)$ $\frac{292}{67}\overset{(-3)^3}{(-27)}$ $\frac{2441}{560}(+81)$ $\frac{20404}{4681}\overset{(-3)^5}{(-243)}$

①と④の( )内の数字には共通点があります。ちがいは( )の指数です。

$$\frac{\frac{2441}{560} + \frac{19 \times 560}{2441}}{2} = \frac{11916881}{2733920}$$

$$11916881^2 - 19 \times 2733920^2 = \begin{array}{r} 142012052768161 \\ -142012052761600 \end{array} = \overset{(-3)^8}{6561}$$

⑤はまったく異なる形の 近似分数を作ります。

$\frac{4}{1}(-3)$ $\frac{9}{2}(+5)$ $\frac{13}{3}(-2)$ $\frac{48}{11}(+5)$ $\frac{61}{14}(-3)$ $\frac{170}{39}(+1)$

$\frac{1421}{326}$ $\frac{3012}{691}$ $\frac{4433}{1017}$ $\frac{16311}{3742}$ $\frac{20744}{4759}$ $\frac{57799}{13260}$

(+1)となる分数を作ることができることにこの方法の意味があります。

①は $\sqrt{\ }$ の中が積の形になっています。

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{a\cdot b} > \frac{2\cdot a\cdot b}{a+b}$$

右辺は $a\cdot b$ を左辺で割ったものです。
$19^2 - 19\times 4^2 = 361 - 304 = 57 = 19\times 3$
( )の数字が小さい左辺の数値を使います。
(の絶対値)

②は $\sqrt{\ }$ の中が和の形になっています。

$$\frac{35}{8} = 4 + \frac{3}{8} \qquad 19 = 4^2 + \boxed{3} \longrightarrow (\sqrt{19}) \longrightarrow 4 + \frac{3}{8}$$

4×2

$$A + \frac{x}{2A} > \sqrt{A^2 + x} > A + \frac{x}{2A+1}$$

$2A+1$ は区間を直線で近似する考え方です。

左辺と右辺とのちがいは $2A$ と $2A+1$ の部分です。
左辺は接線法，右辺は割線法です。

1 2 3 4 5 6 7 8 9
16 ○ ○ ⑲ ○ ○ ○ ○ ○ 25
↓ ↓ ↓
4 $\left(4+\frac{3}{9}\right)$ 5

③は②の右辺の区間近似式の改良です。

x	③ $4+\dfrac{x}{8+\frac{x}{9}}$		② $4+\dfrac{x}{9}$	
16 (0)	4 0/72	16.00	4 0/9 = 4	16.00
17 (1)	4+ 9/73	17.00	4 1/9	16.90
18 (2)	4+ 18/74	18.01	4 2/9	17.83
19 (3)	4+ 27/75	19.01	4 3/9	18.78
20 (4)	4+ 36/76	20.01	4 4/9	19.75
21 (5)	4+ 45/77	21.02	4 5/9	20.75
22 (6)	4+ 54/78	22.02	4 6/9	21.78
23 (7)	4+ 63/79	23.02	4 7/9	22.83
24 (8)	4+ 72/80	24.01	4 8/9	23.90
25 (9)	5 81/81 = 1	25.00	4 9/9 = 5	25.00

連分数の始まりではないかと考えています。

⑥.⑦.⑧は1桁ずつ求める考え方です。⑥と⑦.⑧とのちがいは、

$19 = 4^2 + 3$ の計算結果を次の計算で利用するのかしないのかにあります。⑥では利用していません。⑦と⑧では利用します。⑦は左と右とに計算が分かれています。左は2辺の長さ、右は面積です。

$19 = 16 + 3$ なので $16 = 4^2$ の4は九九を使って求めることができます。

その次です。3×100 とした300より小さく300に一番近くなる $8\square\times\square$ となる□の数を求めます。$81\times 1 = 81$　$82\times 2 = 164$　$83\times 3 = 249$　$84\times 4 = 336$ なので 83×3 をえらびます。□の数は3になります。$83+3 = 86 = 43\times 2$

83に3を加えることで2辺の長さになります。次は $86\square\times\square$ を求めます。

$300 - 249 = 51$　$51\times 100 = 5100$　5100より小さくて一番近くなる場合の□です。

□を求めるのにはコツをつかむ必要があります。これを何回引けるのかにおきかえた考え方が⑧めのこ算です。引く数に工夫があります。4の次を求める計算は $4\times 2\times 10 + 1$ から始めます。81です。次に引く数は83、その次は85と2つづつふやします。$249 = 81 + 83 + 85$　249は同じでもそこに至る道すじがちがいます。機械的に計算できることがこの方法の特徴です。

平方根を小数で近似する方法が⑥から⑧です。⑨では平方根の表を観察します。私は $\sqrt{26}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{28}$ に着目しました。② $\sqrt{5^2+x} < 5 + \frac{x}{10}$ となり $\frac{x}{10}$ は十進法では位どりのちがいとなって表現されます。

平方根を求める考え方 あれやこれや

① $\frac{a+b}{2} > \sqrt{a\cdot b} > \frac{2\cdot a\cdot b}{a+b}$

$\left(\frac{35}{8} = 4+\frac{3}{8}\right)$

$19 = 4\times\frac{19}{4}$

$19 = 4^2+3$

$\frac{4+\frac{19}{4}}{2} = \frac{35}{8}$　　$\frac{\frac{35}{8}+\frac{19\times 8}{35}}{2} = \frac{2441}{560}$

$9^2 - 19\times 1^2 = -3$

$35^2 - 19\times 8^2 = 9$

$2441^2 - 19\times 560^2 = 81$

② $A+\frac{x}{2A} > \sqrt{A^2+x} > A+\frac{x}{2A+1}$

A　1　2　3　4　5

　 1　4　9　16　25

2A+1　3　5　7　9

$\left(4+\frac{3}{8}\right)^2 = 19.14$　　$\left(4+\frac{3}{9}\right)^2 = 18.78$

③ $\sqrt{A^2+x} < A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+1}}$

$4+\cfrac{x}{8+\frac{x}{9}}$　　$16<4^2+x<25$　　$0<x<9$

$6+\cfrac{x}{12+\frac{x}{13}}$　　$36<6^2+x<49$　　$0<x<13$

$4+\cfrac{3}{8+\frac{3}{9}} = \frac{109}{25}$　　$\left(\frac{109}{25}\right)^2 = 19.01$

④ $\sqrt{A^2+x} = A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+}}}$

$\sqrt{1+x} \fallingdotseq 1+\frac{x}{2+\frac{x}{2}} = 1+\frac{2x}{4+x}$

双曲線近似法

$\frac{4}{1} \to 4+\cfrac{3}{8+\cfrac{3}{8+\cfrac{3}{8+\cfrac{3}{8+}}}}$

$\frac{35}{8}$　$\frac{292}{67}$　$\frac{2441}{560}$　$\frac{20404}{4681}$

$292^2 - 19\times 67^2 = -27$

$20404^2 - 19\times 4681^2 = -243$

最良近似分数

⑤ $\sqrt{19} \fallingdotseq \frac{170}{39}$　　$170^2 - 19\times 39^2 = 1$　　$57799^2 - 19\times 13260^2 = 1$

$\frac{\frac{170}{39}+\frac{19\times 39}{170}}{2} = \frac{57799}{13260}$

$\sqrt{19} = 4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{2+}}}}}}}$

$\frac{9}{2}$　$\frac{13}{3}$　$\frac{48}{11}$　$\frac{61}{14}$　$\frac{170}{39}$

$9^2 - 19\times 2^2 = 5$

$13^2 - 19\times 3^2 = -2$

$48^2 - 19\times 11^2 = 5$

$61^2 - 19\times 14^2 = -3$

4　2　1　3　1　2　8

$4\times 2 = 8$

周期の発見

① $\frac{a+b}{2} > \sqrt{a\cdot b} > \frac{2\cdot a\cdot b}{a+b}$　　両辺を加える　①' $\frac{a+b+2\cdot a\cdot b}{2+a+b} < \sqrt{a\cdot b}$

$(a\cdot b \to 1)$

$\frac{21}{20} = \frac{\frac{10}{10}+\frac{11}{10}}{2} > \sqrt{\frac{10}{10}\cdot\frac{11}{10}} > \frac{20\cdot 11}{21\cdot 10} = \frac{22}{21}$　　$\frac{a+b+2\cdot 1}{2+a+b} = 1 = \sqrt{1}$

$\frac{21+22}{20+21} = \frac{43}{41} = 1+\frac{2}{41}$

$\sqrt{1+0.1} > 1+\frac{2\times 0.1}{4+0.1} = 1+\frac{2}{41}$

$\sqrt{1+x} > 1+\frac{2x}{4+x} = 1+\frac{x}{2+\frac{x}{2}}$

③' $A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A}} < \sqrt{A^2+x} < A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+1}}$

$\frac{11}{10}$　$11+10=21$　$21\times 2=42$　42^{+1}_{-1}　$\frac{43}{41}$　$11-10=1$

$\frac{43}{41}+\frac{1}{10\times 2\times 43\times 41}$

$\frac{13}{10}$　$13+10=23$　$23\times 2=46$　46^{+3}_{-3}　$\frac{49}{43}$　$13-10=3$

$\frac{49}{43}+\frac{27}{10\times 2\times 49\times 43}$　　$3^3=27$

③'' $A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A}}} > \sqrt{A^2+x} > A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+1}}}$

$\sqrt{19} = \sqrt{4^2+3}$

$\frac{1}{0}$　$\frac{4}{1}$　3/8 $\frac{3+32}{0+8} = \frac{35}{8}$　3/8 $\frac{12+280}{3+64} = \frac{292}{67}$　3/8 $\frac{105+2336}{24+536} = \frac{2441}{560}$ (19.0002‥)　3/9 $\frac{105+2628}{24+603} = \frac{2733}{627}$ (18.999…

④ $\sqrt{A^2+x} = A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+}}}}}$

$\sqrt{2} = 1+\sqrt{2}-1$

$= 1+\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1}$

$= 1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}$

$= 1+\frac{1}{2+\sqrt{2}-1}$

$\sqrt{7} = 2+\sqrt{7}-2$

$= 2+\frac{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}{\sqrt{7}+2}$

$= 2+\frac{3}{\sqrt{7}+2}$

$= 2+\frac{3}{4+\sqrt{7}-2}$

ラファエル・ボンベリさん(1526-1572)が証明した連分数をさかのぼる

④ $\sqrt{A^2+x} = A + \cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+}}}}}$

無限の連分数により、等号は成立する。

$\sqrt{7} = 2+\boxed{\sqrt{7}-2}$

$= 2+\frac{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}{\sqrt{7}+2}$

$= 2+\frac{3}{\sqrt{7}+2}$

$= 2+\frac{3}{4+\boxed{\sqrt{7}-2}}$

③''の左辺が独立して④になる。

③'' $A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A}}} > \sqrt{A^2+x} > A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+1}}}$ $(0<x<2A+1)$

2A+1は1つだけ　区間近似式

精度を良くするために一段多くつみあげる。不等号の向きは逆になる。

③' $A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A}} < \sqrt{A^2+x} < A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+1}}$ $(0<x<2A+1)$

左辺を作り、不等号を完成させる。

③ $\sqrt{A^2+x} < A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+1}}$ $(0<x<2A+1)$

xの変化による傾きの変化に対応するため、左辺と右辺を1つにした式にする。

② $A+\frac{x}{2A} > \sqrt{A^2+x} > A+\frac{x}{2A+1}$ $(0<x<2A+1)$

$\boxed{0-2}$ の左辺は $\boxed{0-1}$ の変形　数値分析

$\boxed{0-1}$ 大きい不等式

$\frac{a+b}{2} > \sqrt{a\cdot b}$ 積の形 $\Longrightarrow$ $A+\frac{x}{2A} > \sqrt{A^2+x}$

$7=2\times\frac{7}{2}$　$\sqrt{2\times\frac{7}{2}} < \frac{11}{4} = 2+\frac{3}{4} = \boxed{2+\frac{3}{2\times2}}$

ちがいは +1

$\boxed{0-2}$ 小さい不等式

$(0<x<2A+1)$ $\sqrt{A^2+x} > A+\frac{x}{2A+1}$ 和の形

$7=2^2+3$　$\sqrt{2^2+3} > 2+\frac{3}{5} = \boxed{2+\frac{3}{2\times2+1}}$

$\boxed{0-0}$

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
N^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81
(差)	3	5	7	9	11	13	15	17	← 2N+1

$4 < \sqrt{20} < 5$　$20=4\times5 \longrightarrow \boxed{0-1}$　$(4.5)^2 = 20.25$

$4 < \sqrt{19} < 5$　$19=4^2+3 \longrightarrow \boxed{0-2}$　$(4\frac{3}{9})^2 = 18.78$

⑥・⑦・⑧は
1桁ずつ求める考え方

⑥

1	1	41	16-	431	185-	4351	1893-
2	4	42	17-	432	186-	4352	1893-
3	9	43	18- ←	433	187-	4353	1894-
4	16 ←	44	19-	434	188-	4354	1895-
5	25			435	189- ←	4355	1896-
				436	190-	4356	1897-
						4357	1898-
						4358	1899- ←
						4359	1900-

$\sqrt{19} = 4.358\ldots$

⑦ 開平法

```
                                      4 . 3   5   8   8
  4                                 ┌─────────────────────
 +4                                 │ 19
 ────                 4×4           -16
 8=   83                            ─────
 4×2  +3              83×3             300
 ────                                - 249
 86=  865                            ──────
 43×2 +5              865×5              5100
 ────                                  - 4325
 870= 8708                             ────────
 =435×2 +8            8708×8              77500
 ────                                   - 69664
      87168                             ──────────
      +   8           87168×8              783600
 ────                                    - 697344
      87176                              ──────────
                                            86256
```

⑧ $19-4^2=3$　めのこ算

4	43	435	4358
300	5100	77500	33975
① −81	① −861	① −8701	⑥ −8711
219	4239	68799	25264
② −83	② −863	② −8703	⑦ −8713
136	3376	60096	16551
③ −85	③ −865	③ −8705	⑧ −8715
51	2511	51391	7836
	④ −867	④ −8707	
	1644	42684	
	⑤ −869	⑤ −8709	
	775		

81 = 4×2×10+1

861 = 43×2×10+1

8701 = 435×2×10+1

⑨と⑩は級数に至る考え方

⑨ 平方根 の表の観察

0.5 +½　　-0.125 -⅛　　0.0625 + 1/16 ?

$\sqrt{1+a}$ の場合

1.01	1.004987562112089
1.001	1.0004998750062461
1.0001	1.000049998750062

$\sqrt{25+a}$

		㋐	㋑	㋒	㋓	㋔
a=1	5.0	9 9	0 1	9 5	13	59
a=2	5.1	9 6	15	24	22	70
a=3	5.2	9 1	50	26	22	12

㋐	1　2　3	$\times 10^{-1}$			
㋑	-1　-4　-9	$\times 10^{-3}$	-1^2	-2^2	-3^2
㋒	2	$\times 10^{-5}$	2×1^3	$2\times2^3=16$	$2\times3^3=54$
㋓	-5	$\times 10^{-7}$	-5×1^4		
㋔	14	$\times 10^{-9}$	14×1^5		

$$\sqrt{5^2+a} = 5 + \frac{a}{10} - \frac{a^2}{10^3} + \frac{2a^3}{10^5} - \frac{5a^4}{10^7} + \frac{14a^5}{10^9} -$$

$$= 5 + \frac{a}{2\cdot5} - \frac{a^2}{2^3\cdot5^3} + \frac{2a^3}{2^5\cdot5^5} - \frac{5a^4}{2^7\cdot5^7} + \frac{14a^5}{2^9\cdot5^9} -$$

$\sqrt{5^2+a}$ を $\sqrt{1+a}$ に変えると

$$\sqrt{1+a} = 1 + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{2^3} + \frac{2a^3}{2^5} - \frac{5a^4}{2^7} + \frac{14a^5}{2^9} -$$

$$\boxed{\sqrt{1+a} = 1 + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{8} + \frac{a^3}{16} - \frac{5a^4}{128} + \frac{7a^5}{256} -}$$

$$-\frac{1}{8} = -\frac{1}{2\times4} \qquad \frac{1}{16} = \frac{1}{2\times4\times2} = \frac{1\times3}{2\times4\times6}$$

$$-\frac{5}{128} = -\frac{5}{2\times4\times2\times8} = -\frac{1\times3\times5}{2\times4\times6\times8}$$

$$\frac{7}{256} = \frac{7}{2\times4\times\underset{(\times3)\,6}{2}\times8\times\underset{(\times5)\,10}{2}} = \frac{1\times3\times5\times7}{2\times4\times6\times8\times10}$$

係数の規則性は?

級数展開 $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots$ $(|x|<1)$

⑩ パスカルの三角形の行間を読む

A		
B	1　← $(a+b)^{0.5}$	$(a+b)^0$ の係数
C	1　1	$(a+b)^1$
D	1　2　1	$(a+b)^2$
E	1　3　3　1	$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
	1　4　6　4　1	$(a+b)^4$
	1　5　10　10　5　1	$(a+b)^5$

左へ延ばすと

(N)	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	
A	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
B	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	N
C	6	3	1	0	0	1	3	6	10	15	½ N(N+1)
D	-4	-1	0	0	0	1	4	10	20	35	⅙ N(N+1)(N+2)
E	1	0	0	0	0	1	5	15	35	70	1/24 N(N+1)(N+2)(N+3)

[0]を使うと(N+3)(N+2)(N+1)　(N)の成分のあることがわかる。

基準線の転換

(N)	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	
A	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
B	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	N
C	10	6	3	1	0	0	1	3	6	10	½ N(N−1)
D	-20	-10	-4	-1	0	0	0	1	4	10	⅙ N(N−1)(N−2)
E	35	15	5	1	0	0	0	0	1	5	1/24 N(N−1)(N−2)(N−3)
F	-56	-21	-6	-1	0	0	0	0	0	1	1/120 N(N−1)(N−2)(N−3)(N−4)

↑ 0.5　　　120 = 1×2×3×4×5

N = ½
A = 1　B = ½　C = −⅛　D = 1/16　E = −5/128

$$\sqrt{1+x} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{5}{128}x^4 +$$

N = ⅓　A = 1　B = ⅓　C = −1/9　D = 5/81　E = −10/243

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{9}x^2 + \tfrac{5}{81}x^3 - \tfrac{10}{243}x^4 +$$

立方根への応用

2021.11.

ニュートンさんとテイラーさんの考え方のちがいをテーマにしました。

ニュートンさんが $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} +$ を求めた考え方と

バースカラ2世（12世紀 インド）が $\sin a \pm 1^\circ \fallingdotseq \frac{6568}{6569}\sin a \pm \frac{10}{573}\cos a$

を考えるきっかけを説明するのに手にはいりやすい資料をみつけました。理科年表の附録です。バースカラ2世はsinの1°ごとの変化量を調べたと思います。三角関数の表には 17, 18 … 12, 12 … 9, 9, 6, 5, 4, 4, 2, 1, 0 と差がすでに書かれています。17よりも18の方が約数が多いので18を使います。$18 = 2 \times 3 \times 3$

0°, 1°では17, 18ですが、48°では12、60°では9と差は小さくなっています。60°を例にすると差は $9 \div 18 = 0.5$ と0°, 1°の半分になっています。$\cos 0^\circ = 1$

$\cos 60^\circ = 0.5$ と対応します。cosはsinを補うものとして、インドで作られました。

$$\sin a \pm 1^\circ \fallingdotseq \sin a \pm \frac{10}{573}\cos a - \frac{1}{6569}\sin a$$

$\frac{3.1416}{180} = 0.0174533$　　0.017452　　0.000152

$\left(\frac{10}{573}\right)^2 \div 2 = 0.00015228627$

sinの変化をcosで近似し、誤差を−sinで分析しています。

［比較］テイラー展開と比べると第3項まで求められていることがわかります。

$$\sin(a+h) = \sin a + h \cdot \cos a + \frac{h^2}{2!}(-\sin a) + \frac{h^3}{3!}(-\cos a) + \frac{h^4}{4!} \cdot \sin a + \frac{h^5}{5!} \cdot \cos a + \cdots$$

$a \to 0,\ h \to x$ とすると　$\sin 0^\circ = 0$　$\cos 0^\circ = 1$

$$\sin x = 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} + 0 +$$

バースカラ2世は変化するsinの変化量を調べcosと対応させたことがアイデアの始まりだと思いました。ニュートンさんにとっては㋐の発見が大きな意味をもっていました。

◎等比級数の和の公式　$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots\cdots = \frac{a}{1-r}$　$|r|<1$

$$1 + \underbrace{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \cdots}_{=1} = 2 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

$$1 + \underbrace{\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{27} + \tfrac{1}{81} + \cdots}_{=\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}}$$

◎ウォリスさんの $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$　$(n \neq -1)$

三角形の面積は底辺×高さ÷2　　斜辺は直線です。

$S = \frac{1}{2}x^2 \longleftrightarrow y = x$　　$S = \frac{1}{3}x^3 \longleftrightarrow y = x^2$

平方数の和の公式　$S = \frac{1}{3}N^3 + \frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{6}N$　Nを大きくすると$\frac{1}{3}N^3$に近づく。

◎を使うことで　$y = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 -$　項別積分をすることで㋑の式を求めることができます。

$\mathrm{Tan}^{-1}x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 -$

ニュートンさんは㋐の一般の二項定理を使って

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \frac{35}{128}x^8 + \cdots$$

項別積分をすると㋒の $\mathrm{Sin}^{-1}x$ の式になります。　$x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{x^7}{7} + \cdots$

ニュートンさんは $x = \sin^{-1}y$ を逆に解きました。

$$y = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 + \cdots$$

$y = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$　このようにして㋕の sinxの級数展開にたどりつきました。

テイラーさんの高階微分の活用の考え方の生まれる前は級数展開と項別積分の考え方が主流であったことがわかりました。テイラー展開のアイデアの始まりについて考えてみました。②　$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots$ の式を分解します。

$f(x) \to f'(x) \to f''(x) \to f'''(x)$　f(x)を次々と微分する。

$1 \to h \to \frac{h^2}{2!} \to \frac{h^3}{3!}$　補正部分。

なぜ階乗（2!, 3!）があるのかを4乗数の階差数列を使って考えました。

0	1	16	81	256	625	1296	M−4−0
1	15	65	175	369	671		M−4−1
14	50	110	194	302			M−4−2
36	60	84	108				M−4−3
24	24	24					M−4−4
0	0						

階差0項数列
1　1　1　1
2　6　14
6　36
24

M−4−0	N^4				
M−4−1	$4N^3+6N^2+4N+1$	4×1	$\boxed{6\times1}$	4×1	$\boxed{1\times1}$
M−4−2	$12N^2+24N+14$	$\boxed{6\times2}$	4×6	$\boxed{1\times14}$	
M−4−3	$24N+36$	4×6	$\boxed{1\times36}$		
M−4−4	24	$\boxed{1\times24}$			

M−4−1 は $(N+1)^4 - N^4$

$4N^3 + 6N^2 + 4N + 1$

第1項は N^4の微分をくり返す。

$4N^3 + 12N^2 + 24N + 24$

[階乗で割る]　(÷1)　(÷2)　(÷6)　(÷24)

$4N^3 + 6N^2 + 4N + 1$

(N+1)とする増加分を微分をくり返した数値を利用して、表現することができる。

$(N+a)^4$ とすると $N^4 + 4N^3a + 6N^2a^2 + 4Na^3 + a^4$ となり、$h, h^2, h^3 \ldots$ の説明に使うことができます。

①　$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x}$ を見なおします。

				微分の(−1)部分		階乗の部分
1	1	×	$\frac{1}{2}$	$= \frac{1}{2}$	×	$\frac{1}{1}$
$+\frac{a}{2}$	$+\frac{1}{2}$	×	$-\frac{1}{4}$	$= -\frac{1}{2}$	×	$\frac{1}{2}$
$-\frac{a^2}{8}$	$-\frac{1}{2\times4}$	×	$-\frac{3}{6}$	$= -\frac{3}{2}$	×	$\frac{1}{3}$
$+\frac{a^3}{16}$	$+\frac{1\times3}{2\times4\times6}$	×	$-\frac{5}{8}$	$= -\frac{5}{2}$	×	$\frac{1}{4}$
$-\frac{5a^4}{128}$	$-\frac{1\times3\times5}{2\times4\times6\times8}$	×	$-\frac{7}{10}$	$= -\frac{7}{2}$	×	$\frac{1}{5}$
$+\frac{7a^5}{256}$	$+\frac{1\times3\times5\times7}{2\times4\times6\times8\times10}$					

$\sqrt{x+a}$ として考えます。

		$\sqrt{A^2+a}$	$\sqrt{25+a}$
$X^{\frac{1}{2}}$		A	5
$+\frac{1}{2}X^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{a}{1}$	$+\frac{a}{2A}$	$+\frac{1}{10}a$
$-\frac{1}{4}X^{-\frac{3}{2}}$	$\frac{a^2}{2!}$	$-\frac{a^2}{8A^3}$	$-\frac{1}{10^3}a^2$
$+\frac{3}{8}X^{-\frac{5}{2}}$	$\frac{a^3}{3!}$	$+\frac{a^3}{16A^5}$ $(16=2^4)$	$+\frac{2}{10^5}a^3$
$-\frac{15}{16}X^{-\frac{7}{2}}$	$\frac{a^4}{4!}$	$-\frac{5a^4}{128A^7}$	$-\frac{5}{10^7}a^4$
$+\frac{105}{32}X^{-\frac{9}{2}}$	$\frac{a^5}{5!}$	$+\frac{7a^5}{256A^9}$ $(256=2^8)$	$+\frac{14}{10^9}a^5$

[立方根]　$\sqrt[3]{A^3+a} = A + \frac{a}{3A^2} - \frac{a^2}{9A^5} + \frac{5a^3}{81A^8} - \cdots$

$\sin 61^\circ$ について考えます。

加法定理では　$\sin(60^\circ+1^\circ) = \sin 60^\circ \cdot \cos 1^\circ + \cos 60^\circ \cdot \sin 1^\circ$

微分法の1次近似式では　$\sin(60^\circ+1^\circ) \fallingdotseq \sin 60^\circ \times 1 + \cos 60^\circ \cdot \frac{\pi}{180}$

$\cos 1^\circ$ は1に $\sin 1^\circ$ は角度 1° の円周(円弧)におきかわっています。

$\sin 61^\circ - \sin 60^\circ = 0.0085943033355$

微分法の1次近似式では　$\cos 60^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = 0.5 \times 0.01745 = 0.00872$

0.008までしか正しくありません。テイラーさんの積極的に微分をくり返す考え方がためされます。 sin→微分→cos→微分→−sin→微分→−cos→微分→sin。もう1つはラジアンという考え方です。円周の長さと角度を対応させます。tanの場合は微分をすると $\frac{1}{\cos^2}$ となり計算式は複雑になります。　$\tan(a+h) \fallingdotseq \tan a + h\frac{1}{\cos^2 a} + \frac{h^2}{2}\frac{2\cdot\sin a}{\cos^3 a}$

$$\sin(a+h) \fallingdotseq \sin a + \underset{㋐}{h\cdot\cos a} + \underset{㋑}{\frac{h^2}{2!}(-\sin a)} + \underset{㋒}{\frac{h^3}{3!}(-\cos a)} + \underset{㋓}{\frac{h^4}{4!}\cdot\sin a} +$$

$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$　$\cos 60^\circ = 0.5$　$h = \frac{\pi}{180} = 0.017453292$ Ⓐ

㋐	0.0087266 4626	Ⓐ$\div 2$
㋑	−0.000131903212	−Ⓐ$^2 \div 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$
㋒	−0.000000443048 0778	−Ⓐ$^3 \div 6 \div 2$
㋓	0.000000 003348334675	Ⓐ$^4 \div 24 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

0.008594 30335

志賀浩二さんの「無限のなかの数学」(岩波新書 1995年)を参考にしました。$\mathrm{Tan}^{-1}x$, $\sin^{-1}x$ と面積とを対応させる考え方がどこから生まれたのかが気になります。ウォリスさんの $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ $(n \fallingdotseq -1)$ の -1 は　$y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ で反比例のグラフになります。曲線とx軸との間の面積を調べることで自然対数の考え方が生まれています。

今年の6月に愛知県の方より高校数学の教科書の写しを送っていただきました。第5章 4 関数の近似式です。テイラー展開のアイデアの始まりは?をテーマにしました。3つのことを手がかりにしました。

① 微分法 − 1次近似式の精度を良くするには?

$$h \fallingdotseq 0 \text{ のとき } f(a+h) \fallingdotseq f(a) + f'(a)h$$

② 級数展開の具体例

(ア) 平方根の表の観察　$\sqrt{25+a} \rightarrow \sqrt{1+a}$

(イ) パスカルの三角形の行間を読む。(ニュートンさんの考え方)

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \quad (|x|<1)$$

③ N^M の階差数列の一般式の分析

20年前に岐阜県の方に微分と差分が1つになっていると言われたことを思い出しました。

理科年表 平成7年

級数展開

ア　$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots\cdots$　$(|x|<1)$

イ　$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2+\dfrac{1}{16}x^3-\dfrac{5}{128}x^4+\dfrac{7}{256}x^5-\cdots\cdots$　$(|x|<1)$

ウ　$(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{8}x^2-\dfrac{5}{16}x^3+\dfrac{35}{128}x^4-\dfrac{63}{256}x^5+\cdots\cdots$　$(|x|<1)$

エ　$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots\cdots$

オ　$\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots\cdots$　$(|x|\leqq 1,\ x\neq -1)$

カ　$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\cdots\cdots$

キ　$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\cdots\cdots$

ク　$\tan x=x+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{15}x^5+\dfrac{17}{315}x^7+\cdots\cdots$　$\left(|x|<\dfrac{\pi}{2}\right)$

ケ　$\mathrm{Sin}^{-1}x=x+\dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{4}\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{4}\dfrac{5}{6}\dfrac{x^7}{7}+\cdots\cdots$　$(|x|\leqq 1,\ x\neq\pm 1)$

コ　$\mathrm{Tan}^{-1}x=x-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{1}{7}x^7+\cdots\cdots$　$(|x|\leqq 1,\ x\neq\pm i)$

サ　$K(k)=\dfrac{\pi}{2}\left(1+\dfrac{1}{4}k^2+\dfrac{9}{64}k^4+\dfrac{25}{256}k^6+\cdots\cdots\right)$　(第1種完全楕円積分，$|k|<1$)

シ　$E(k)=\dfrac{\pi}{2}\left(1-\dfrac{1}{4}k^2-\dfrac{3}{64}k^4-\dfrac{5}{256}k^6-\cdots\cdots\right)$　(第2種完全楕円積分，$|k|<1$)

ス　$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\dfrac{h^2}{2!}f''(x)+\dfrac{h^3}{3!}f'''(x)+\cdots\cdots+\dfrac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)\cdots\cdots$

(テイラー級数)

セ　$f(x)=\dfrac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\dfrac{n\pi}{c}x+b_n\sin\dfrac{n\pi}{c}x\right)$　(フーリエ級数)

$$a_n=\frac{1}{c}\int_{-c}^{+c}f(x)\cos\frac{n\pi x}{c}\,dx,\qquad b_n=\frac{1}{c}\int_{-c}^{+c}f(x)\sin\frac{n\pi x}{c}\,dx$$

三 角 関 数 表

	sin	cosec	tan	cot	sec	cos		
0°	0.000_{17}	∞ …	0.000_{17}	∞ …	1.000_{0}	1.000_{0}	90°	
1	0.017_{18}	57.299 …	0.017_{18}	57.290 …	1.000_{1}	1.000_{1}	89	
2	0.035_{17}	28.654 …	0.035_{17}	28.636 …	1.001_{0}	0.999_{0}	88	
3	0.052_{18}	19.107 …	0.052_{18}	19.081 …	1.001_{1}	0.999_{1}	87	
4	0.070_{17}	14.336 …	0.070_{17}	14.301 …	1.002_{2}	0.998_{2}	86	
5	0.087_{18}	11.474 …	0.087_{18}	11.430 …	1.004_{2}	0.996_{1}	85	
6	0.105_{17}	9.567 …	0.105_{18}	9.514 …	1.006_{2}	0.995_{2}	84	1/9
7	0.122_{17}	8.206 …	0.123_{18}	8.144 …	1.008_{2}	0.993_{3}	83	
8	0.139_{17}	7.185_{793}	0.141_{17}	7.115_{801}	1.010_{2}	0.990_{2}	82	
9	0.156_{18}	6.392_{633}	0.158_{18}	6.314_{643}	1.012_{3}	0.988_{3}	81	
10	0.174_{17}	5.759_{518}	0.176_{18}	5.671_{526}	1.015_{4}	0.985_{3}	80	
11	0.191_{17}	5.241_{431}	0.194_{19}	5.145_{440}	1.019_{3}	0.982_{4}	79	
12	0.208_{17}	4.810_{365}	0.213_{18}	4.705_{374}	1.022_{4}	0.978_{4}	78	
13	0.225_{17}	4.445_{311}	0.231_{18}	4.331_{320}	1.026_{5}	0.974_{4}	77	2/9
14	0.242_{17}	4.134_{270}	0.249_{19}	4.011_{279}	1.031_{4}	0.970_{4}	76	
15	0.259_{17}	3.864_{236}	0.268_{19}	3.732_{245}	1.035_{5}	0.966_{5}	75	
16	0.276_{16}	3.628_{208}	0.287_{19}	3.487_{216}	1.040_{6}	0.961_{5}	74	
17	0.292_{17}	3.420_{184}	0.306_{19}	3.271_{193}	1.046_{5}	0.956_{5}	73	
18	0.309_{17}	3.236_{164}	0.325_{19}	3.078_{174}	1.051_{7}	0.951_{5}	72	
19	0.326_{16}	3.072_{148}	0.344_{20}	2.904_{157}	1.058_{6}	0.946_{6}	71	1/3
20	0.342_{16}	2.924_{134}	0.364_{20}	2.747_{142}	1.064_{7}	0.940_{6}	70	
21	0.358_{17}	2.790_{121}	0.384_{20}	2.605_{130}	1.071_{8}	0.934_{7}	69	
22	0.375_{16}	2.669_{110}	0.404_{20}	2.475_{119}	1.079_{7}	0.927_{6}	68	
23	0.391_{16}	2.559_{100}	0.424_{21}	2.356_{110}	1.086_{9}	0.921_{7}	67	
24	0.407_{16}	2.459_{93}	0.445_{21}	2.246_{101}	1.095_{8}	0.914_{8}	66	
25	0.423_{15}	2.366_{85}	0.466_{22}	2.145_{95}	1.103_{10}	0.906_{7}	65	
26	0.438_{16}	2.281_{78}	0.488_{22}	2.050_{87}	1.113_{9}	0.899_{8}	64	
27	0.454_{15}	2.203_{73}	0.510_{22}	1.963_{82}	1.122_{11}	0.891_{8}	63	
28	0.469_{16}	2.130_{67}	0.532_{22}	1.881_{77}	1.133_{10}	0.883_{8}	62	
29	0.485_{15}	2.063_{63}	0.554_{23}	1.804_{72}	1.143_{12}	0.875_{9}	61	
30	0.500_{15}	2.000_{58}	0.577_{24}	1.732_{68}	1.155_{12}	0.866_{9}	60	1/2
31	0.515_{15}	1.942_{55}	0.601_{24}	1.664_{64}	1.167_{12}	0.857_{9}	59	
32	0.530_{15}	1.887_{51}	0.625_{24}	1.600_{60}	1.179_{13}	0.848_{9}	58	
33	0.545_{14}	1.836_{48}	0.649_{26}	1.540_{57}	1.192_{14}	0.839_{10}	57	
34	0.559_{15}	1.788_{45}	0.675_{25}	1.483_{55}	1.206_{15}	0.829_{10}	56	
35	0.574_{14}	1.743_{42}	0.700_{27}	1.428_{52}	1.221_{15}	0.819_{10}	55	
36	0.588_{14}	1.701_{39}	0.727_{27}	1.376_{49}	1.236_{16}	0.809_{10}	54	
37	0.602_{14}	1.662_{38}	0.754_{27}	1.327_{47}	1.252_{17}	0.799_{11}	53	
38	0.616_{13}	1.624_{35}	0.781_{29}	1.280_{45}	1.269_{18}	0.788_{11}	52	
39	0.629_{14}	1.589_{33}	0.810_{29}	1.235_{43}	1.287_{18}	0.777_{11}	51	
40	0.643_{13}	1.556_{32}	0.839_{30}	1.192_{42}	1.305_{20}	0.766_{11}	50	
41	0.656_{13}	1.524_{30}	0.869_{31}	1.150_{39}	1.325_{21}	0.755_{12}	49	
42	0.669_{13}	1.494_{28}	0.900_{33}	1.111_{39}	1.346_{21}	0.743_{12}	48	2/3
43	0.682_{13}	1.466_{26}	0.933_{33}	1.072_{36}	1.367_{23}	0.731_{12}	47	
44	0.695_{12}	1.440_{26}	0.966_{34}	1.036_{36}	1.390_{24}	0.719_{12}	46	
45	0.707	1.414	1.000	1.000	1.414	0.707	45	
	cos	sec	cot	tan	cosec	sin		

附

4 関数の近似式

関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ は,

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

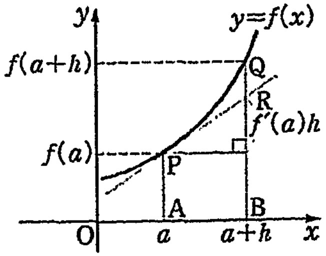
であり，h が十分 0 に近いときは,

$$f'(a)\fallingdotseq\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

となるから,

$$f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h$$

と考えられる。



したがって，$f(a+h)$ は次のように h の1次式で近似される。

1次の近似式

$h\fallingdotseq 0$ のとき，　$f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h$

例 29　$h\fallingdotseq 0$ のときの $\sin(a+h)$ の1次の近似式を作ってみよう。

$(\sin x)'=\cos x$ であるから，$h\fallingdotseq 0$ のとき,

$$\sin(a+h)\fallingdotseq\sin a+h\cos a$$

例 29 の近似式を使うと，$\sin 31^\circ=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right)$ の近似値は,

$$\sin 31^\circ\fallingdotseq\sin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi}{6}$$

$$\fallingdotseq 0.5+0.01745\times 0.8660\fallingdotseq 0.5151$$

注　実際には，$\sin 31^\circ=0.5150\cdots\cdots$ であり，この値は小数第3位まで一致していることがわかる。

問54　$h\fallingdotseq 0$ のときの $\cos(a+h)$ の1次の近似式を作り，$\cos 44^\circ$ の近似値を求めよ。

前ページの1次の近似式で，$a=0$ の場合を考え，h を x と書きかえると，次の近似式が得られる。

$x\fallingdotseq 0$ のとき，　$f(x)\fallingdotseq f(0)+f'(0)x$

例 30　$x\fallingdotseq 0$ のときの $f(x)=(1+x)^r$ の1次の近似式を作ってみよう。

$$f'(x)=r(1+x)^{r-1}$$

で，$f(0)=1$，$f'(0)=r$ であるから,

$x\fallingdotseq 0$ のとき，　$(1+x)^r\fallingdotseq 1+rx$

例題 18　$x\fallingdotseq 0$ のとき，$\sqrt[3]{1+x}$ の1次の近似式を作れ。また，それを使って，$\sqrt[3]{8.1}$ の近似値を求めよ。

解　$\sqrt[3]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{3}}$ であるから，$x\fallingdotseq 0$ のとき,

$$\sqrt[3]{1+x}\fallingdotseq 1+\frac{1}{3}x$$

$$\sqrt[3]{8.1}=\sqrt[3]{8+0.1}=\sqrt[3]{8(1+0.0125)}=2\sqrt[3]{1+0.0125}$$

$$\fallingdotseq 2\left(1+\frac{1}{3}\times 0.0125\right)\fallingdotseq 2.0083$$

注　$\sqrt[3]{8.1}$ の真の値は，$\sqrt[3]{8.1}=2.00829885\cdots\cdots$ で，上の例題 18 の結果は，この値のよい近似値になっている。

問55　$\sqrt[3]{1.01}$ および $\sqrt[3]{65}$ の近似値を求めよ。

問56　$x\fallingdotseq 0$ のとき，次の関数の1次の近似式を作れ。

(1) e^x　　(2) $\tan x$　　(3) $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$　　(4) $\log(1+x)$

†**問57**　次の値の近似値を求めよ。

(1) $\tan 1^\circ$　　(2) $\frac{1}{\sqrt{8.99}}$　　(3) $\log 1.001$