武田 利一 様　　　　2021.9.29

おいそがしい日々をすごされていると思います。お体に気をつけて下さい。

ニュートンさんが $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} +$ を求めた考え方と バースカラ2世（12世紀 インド）が近似式

$$\sin a \pm 1 \fallingdotseq \frac{6568}{6569} \sin a \pm \frac{10}{573} \cos a$$

を考えるきっかけを説明するのに手にはいりやすい資料をみつけました。理科年表の附録です。

バースカラ2世は sin の 1° ごとの変化量を調べたと思います。

附7の表には 17.18 … 12.12 … 9.9 … 6.5 … 4.4 … 2.1.0 と差がすでに書かれています。17よりも18の方が約数が多いので 18を使います。$18 \div 2 = 9$　$18 \div 9 = 2$

0°.1° では 17.18 ですが 48° では 12　60° では 9 と差は小さくなっています。60° を例にすると、差は $9 \div 18 = 0.5$ と 0°.1° の半分になっています。$\cos 0° = 1$,　$\cos 60° = 0.5$ と対応します。

cos は sin を補うものとして、インドで作られた考え方です。

$$\sin a \pm 1 = \sin a \pm \frac{10}{573} \cos a - \frac{1}{6569} \sin a$$

$\frac{3.1416}{180} = 0.0174533$　　0.017452　　0.000152

$\left(\frac{10}{573}\right)^2 \div 2 = 0.00015228627$

sin の変化を cos で近似し、誤差を −sin で分析しています。

バースカラ2世は変化するsinの変化量を調べcosと対応させたこと

がアイデアの始まりだと思いました。

ニュートンさんにとっては㋐の発見が大きな意味をもっていたと思いました。

◎等比級数の和の公式

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \frac{a}{1-r} \quad |r|<1$$

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots}_{=1} = 2 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

◎ウォリスさんの $\displaystyle\int_0^x t^n\,dt = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$

三角形の面積は 底辺×高さ÷2　斜辺は直線

$S = \frac{1}{2}x^2$　　$y = x$

$S = \frac{1}{3}x^3$　　$y = x^2$

平方数のあるりの和の公式

$$S = \frac{1}{3}N^3 + \frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{6}N$$

Nを大きくすると $\frac{1}{3}N^3$ に近づく

◎を使うことで

$$y = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 -$$

$$\downarrow$$

$$\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} -$$

項別積分をすることで㋑の式を求めることができます。

ニュートンさんは ㋐ 一般の二項定理を使って

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \frac{35}{128}x^8 + \cdots$$

項別積分をすると

$$x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{x^7}{7} + \cdots$$

㋘の $\sin^{-1}x$ の式になります。

ニュートンさんは $x = \sin^{-1}y$ を逆に解きました。

$$y = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 -$$

$$y = \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

このようにして ㋕ $\sin x$ の級数展開にたどりつきました。

テイラーさんの高階微分の活用の考え方の生まれる前は 級数展開と項別積分の考え方が主流であったことがわかりました。

$y = \dfrac{1}{1+x^2}$ によって作られる面積 と $\tan^{-1}x$

$y = \dfrac{1}{1+x}$ と $\log(1+x)$

の関係がどのようにして発見されたのかが気になります。

林 利英

理科年表 国立天文台編
平成7年 丸善

級数展開

ア $(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots\cdots\cdots$　$(|x|<1)$

1/1

イ $(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2+\dfrac{1}{16}x^3-\dfrac{5}{128}x^4+\dfrac{7}{256}x^5-\cdots\cdots\cdots$　$(|x|<1)$

ウ $(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{8}x^2-\dfrac{5}{16}x^3+\dfrac{35}{128}x^4-\dfrac{63}{256}x^5+\cdots\cdots\cdots$　$(|x|<1)$

エ $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots\cdots\cdots$

オ $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots\cdots$　$(|x|\leqq 1,\ x\neq -1)$

カ $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\cdots\cdots$

キ $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\cdots\cdots$

ク $\tan x=x+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{15}x^5+\dfrac{17}{315}x^7+\cdots\cdots$　$\left(|x|<\dfrac{\pi}{2}\right)$

ケ $\mathrm{Sin}^{-1}x=x+\dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{4}\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{4}\dfrac{5}{6}\dfrac{x^7}{7}+\cdots\cdots$　$(|x|\leqq 1,\ x\neq \pm 1)$

コ $\mathrm{Tan}^{-1}x=x-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{1}{7}x^7+\cdots\cdots$　$(|x|\leqq 1,\ x\neq \pm i)$

サ $K(k)=\dfrac{\pi}{2}\left(1+\dfrac{1}{4}k^2+\dfrac{9}{64}k^4+\dfrac{25}{256}k^6+\cdots\cdots\right)$　(第1種完全楕円積分，$|k|<1$)

シ $E(k)=\dfrac{\pi}{2}\left(1-\dfrac{1}{4}k^2-\dfrac{3}{64}k^4-\dfrac{5}{256}k^6-\cdots\cdots\right)$　(第2種完全楕円積分，$|k|<1$)

ス $f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\dfrac{h^2}{2!}f''(x)+\dfrac{h^3}{3!}f'''(x)+\cdots\cdots+\dfrac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)\cdots\cdots$

(テイラー級数)

セ $f(x)=\dfrac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\dfrac{n\pi}{c}x+b_n\sin\dfrac{n\pi}{c}x\right)$　(フーリエ級数)

$$a_n=\frac{1}{c}\int_{-c}^{+c}f(x)\cos\frac{n\pi x}{c}\,dx,\qquad b_n=\frac{1}{c}\int_{-c}^{+c}f(x)\sin\frac{n\pi x}{c}\,dx$$

三角関数表

	sin	cosec	tan	cot	sec	cos		
0°	0.000_{17}	∞ …	0.000_{17}	∞ …	1.000_{0}	1.000_{0}	90°	
1	0.017_{18}	57.299 …	0.017_{18}	57.290 …	1.000_{1}	1.000_{1}	89	
2	0.035_{17}	28.654 …	0.035_{17}	28.636 …	1.001_{0}	0.999_{0}	88	
3	0.052_{18}	19.107 …	0.052_{18}	19.081 …	1.001_{1}	0.999_{1}	87	
4	0.070_{17}	14.336 …	0.070_{17}	14.301 …	1.002_{2}	0.998_{2}	86	
5	0.087_{18}	11.474 …	0.087_{18}	11.430 …	1.004_{2}	0.996_{1}	85	
6	0.105_{17}	9.567 …	0.105_{18}	9.514 …	1.006_{2}	0.995_{2}	84	1/9
7	0.122_{17}	8.206 …	0.123_{18}	8.144 …	1.008_{2}	0.993_{3}	83	
8	0.139_{17}	7.185_{793}	0.141_{17}	7.115_{801}	1.010_{2}	0.990_{2}	82	
9	0.156_{18}	6.392_{633}	0.158_{18}	6.314_{643}	1.012_{3}	0.988_{3}	81	
10	0.174_{17}	5.759_{518}	0.176_{18}	5.671_{526}	1.015_{4}	0.985_{3}	80	
11	0.191_{17}	5.241_{431}	0.194_{19}	5.145_{440}	1.019_{3}	0.982_{4}	79	
12	0.208_{17}	4.810_{365}	0.213_{18}	4.705_{374}	1.022_{4}	0.978_{4}	78	
13	0.225_{17}	4.445_{311}	0.231_{18}	4.331_{320}	1.026_{5}	0.974_{4}	77	1/4.5
14	0.242_{17}	4.134_{270}	0.249_{19}	4.011_{279}	1.031_{4}	0.970_{4}	76	
15	0.259_{17}	3.864_{236}	0.268_{19}	3.732_{245}	1.035_{5}	0.966_{5}	75	
16	0.276_{16}	3.628_{208}	0.287_{19}	3.487_{216}	1.040_{6}	0.961_{5}	74	
17	0.292_{17}	3.420_{184}	0.306_{19}	3.271_{193}	1.046_{5}	0.956_{5}	73	
18	0.309_{17}	3.236_{164}	0.325_{19}	3.078_{174}	1.051_{7}	0.951_{5}	72	
19	0.326_{16}	3.072_{148}	0.344_{20}	2.904_{157}	1.058_{6}	0.946_{6}	71	1/3
20	0.342_{16}	2.924_{134}	0.364_{20}	2.747_{142}	1.064_{7}	0.940_{6}	70	
21	0.358_{17}	2.790_{121}	0.384_{20}	2.605_{130}	1.071_{8}	0.934_{7}	69	
22	0.375_{16}	2.669_{110}	0.404_{20}	2.475_{119}	1.079_{7}	0.927_{6}	68	
23	0.391_{16}	2.559_{100}	0.424_{21}	2.356_{110}	1.086_{9}	0.921_{7}	67	
24	0.407_{16}	2.459_{93}	0.445_{21}	2.246_{101}	1.095_{8}	0.914_{8}	66	
25	0.423_{15}	2.366_{85}	0.466_{22}	2.145_{95}	1.103_{10}	0.906_{7}	65	
26	0.438_{16}	2.281_{78}	0.488_{22}	2.050_{87}	1.113_{9}	0.899_{8}	64	
27	0.454_{15}	2.203_{73}	0.510_{22}	1.963_{82}	1.122_{11}	0.891_{8}	63	
28	0.469_{16}	2.130_{67}	0.532_{22}	1.881_{77}	1.133_{10}	0.883_{8}	62	
29	0.485_{15}	2.063_{63}	0.554_{23}	1.804_{72}	1.143_{12}	0.875_{9}	61	
30	0.500_{15}	2.000_{58}	0.577_{24}	1.732_{68}	1.155_{12}	0.866_{9}	60	1/2
31	0.515_{15}	1.942_{55}	0.601_{24}	1.664_{64}	1.167_{12}	0.857_{9}	59	
32	0.530_{15}	1.887_{51}	0.625_{24}	1.600_{60}	1.179_{13}	0.848_{9}	58	
33	0.545_{14}	1.836_{48}	0.649_{26}	1.540_{57}	1.192_{14}	0.839_{10}	57	
34	0.559_{15}	1.788_{45}	0.675_{25}	1.483_{55}	1.206_{15}	0.829_{10}	56	
35	0.574_{14}	1.743_{42}	0.700_{27}	1.428_{52}	1.221_{15}	0.819_{10}	55	
36	0.588_{14}	1.701_{39}	0.727_{27}	1.376_{49}	1.236_{16}	0.809_{10}	54	
37	0.602_{14}	1.662_{38}	0.754_{27}	1.327_{47}	1.252_{17}	0.799_{11}	53	
38	0.616_{13}	1.624_{35}	0.781_{29}	1.280_{45}	1.269_{18}	0.788_{11}	52	
39	0.629_{14}	1.589_{33}	0.810_{29}	1.235_{43}	1.287_{18}	0.777_{11}	51	
40	0.643_{13}	1.556_{32}	0.839_{30}	1.192_{42}	1.305_{20}	0.766_{11}	50	
41	0.656_{13}	1.524_{30}	0.869_{31}	1.150_{39}	1.325_{21}	0.755_{12}	49	
42	0.669_{13}	1.494_{28}	0.900_{33}	1.111_{39}	1.346_{21}	0.743_{12}	48	2/3
43	0.682_{13}	1.466_{26}	0.933_{33}	1.072_{36}	1.367_{23}	0.731_{12}	47	
44	0.695_{12}	1.440_{26}	0.966_{34}	1.036_{36}	1.390_{24}	0.719_{12}	46	
45	0.707	1.414	1.000	1.000	1.414	0.707	45	
	cos	sec	cot	tan	cosec	sin		

附