武田 利一様

2021. 8. 11

林 和英

「テイラー展開のアイディアの始まりは？」のP5.P6を作りました。

sinxとcosxの級数展開の公式をテーマとしました。

ニュートンさん、テイラーさん、マクローリンさんの合力によって生まれたと思いました。

三角関数の級数展開のアイデアの始まりは円に内接外接する正多角形の辺の加重平均にあるのではという考えはより深まりました。

(内接1 + 外接1) ÷ 2 ⟶ 辺を2倍にした外接に近づく

(内接3 + 外接1) ÷ 4 ⟶ 辺を2倍にした内接に近づく

〔辺を2倍にすると誤差は約16分の1になる〕

(内接2 + 外接1) ÷ 3 ⟶ π の精度が良くなる。

正96角形の場合

3:1	3.14 1452 6 13
2:1	3.14 1592 8 34
1:1	3.14 1873 2 25

$\frac{355}{113} = 3.1415929$

($\frac{22}{7}$)

アルキメデスさんが約3.14を求めた同じ数値で$355/113$を求めることができます。祖沖之(429-500)さんは加重平均の考え方を知っていたのではないかと思います。同時にこの事実はsin, tanと円周との関係(ラジアン弧度法)への糸口にもなっています。

2021. 8. 10

テイラーさんの考えをマクローリン(Colin Maclaurin. 1698-1746)さんが発展させました。 $f(t)=f(0)+f'(0)t+\frac{f''(0)}{2!}t^2+\frac{f'''(0)}{3!}t^3+\cdots$

$\sin 61^\circ$ を例として考えます。

加法定理では $\sin(60^\circ+1^\circ)=\sin 60^\circ\cdot\cos 1^\circ+\cos 60^\circ\cdot\sin 1^\circ$

微分法の1次近似式では $\sin(60^\circ+1^\circ)\fallingdotseq\sin 60^\circ\times 1+\cos 60^\circ\cdot\frac{180}{\pi}$

$\cos 1^\circ$ は 1 に $\sin 1^\circ$ は角度 1° の円周(円弧)におきかわっています。

加法定理を使って $\sin 61^\circ$ を求めるためには、$\cos 1^\circ$、$\sin 1^\circ$ の数値を必要とします。しかし、正直いってむつかしい。

$\sin 61^\circ-\sin 60^\circ=0.0085943033\,55$

微分法の1次近似式では $\cos 60^\circ\cdot\frac{180}{\pi}=0.5\times 0.01745=0.00872$

0.008 までしか正しくありません。はたしてこのような方法が使いものになるのかと、始まりはこのようなものだと思います。テイラーさんの積極的に微分をくり返す考え方がためされます。 sin → 微分 → cos → 微分 → −sin → 微分 → −cos → 微分 → sin もう1つはラジアンという考え方です。円周の長さと角度を対応させます。

tan の場合は微分すると $\frac{1}{\cos^2}$ となり 計算式は複雑になります。

$$\tan(a+h)\fallingdotseq\tan a+h\cdot\frac{1}{\cos^2 a}+\frac{h^2}{2}\cdot\frac{2\cdot\sin a}{\cos^3 a}$$

$$\sin(a+h) \fallingdotseq \sin a + \underbrace{h \cdot \cos a}_{(ア)} + \underbrace{\frac{h^2}{2!}(-\sin a)}_{(イ)} + \underbrace{\frac{h^3}{3!}(-\cos a)}_{(ウ)}$$

$$+ \underbrace{\frac{h^4}{4!} \cdot \sin a}_{(エ)} +$$

$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$　　$\cos 60^\circ = 0.5$

$h = \frac{\pi}{180} = 0.01745329$ Ⓐ

$\sin 61^\circ - \sin 60^\circ = 0.008594303355$

(ア)　0.0087266 4626　　Ⓐ $\div 2$

(イ)　-0.000131903212　　$-Ⓐ^2 \div 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

(ウ)　-0.0000004430480778　　$-Ⓐ^3 \div 6 \div 2$

+ (エ)　0.0000000003348334675　　$Ⓐ^4 \div 24 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

0.008594430335

式が化けます。

$a \to 0$　$h \to x$ として考えると　$\sin 0^\circ = 0$　$\cos 0^\circ = 1$

$$\sin x = 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 +$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos(a+h) \fallingdotseq \cos a + h(-\sin a) + \frac{h^2}{2!}(-\cos a) + \frac{h^3}{3!}(\sin a)$$

$$\cos x = 1 + 0 - \frac{x^2}{2!} + 0 + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$