

テイラー展開のアイデアの始まりは？

テイラー展開により三角関数が(ラジアン単位)で

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

というきれいな形の級数展開の公式で表現されることは、私に

とって驚きました。テイラー(Brook Taylor, 1685-1731)さん

がどのようにしてこの考えに至ったのかを私なりに考えてみました。

3つのことを手がかりにします。

① 微分法 - 1次の近似式 の精度を良くするには？

$$h \approx 0 \text{ のとき, } f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$$

② 級数展開の具体例

(ア) 平方根の表の観察 $\sqrt{25+a} \rightarrow \sqrt{1+a}$

(イ) パスカルの三角形の行間を読む。

③ N^M の階差数列の一般式の分析

ニュートン(1643-1726)さんは ①を利用した反復法 と ②の(イ)を使った

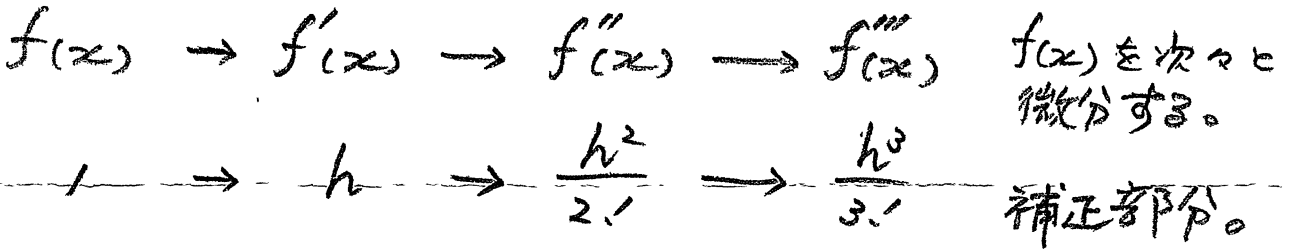
$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \dots \quad (|x| < 1)$$

級数展開の公式は知っていました。テイラーさんがつけ加えたものを

理解する上で ③が役に立ちました。有限のテイラー展開です。

テイラー展開の公式は 大まか2つの部分に分けることができます。

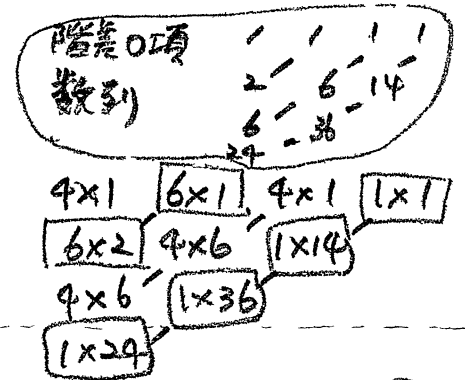
$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) +$$



③ N^M $M=4$ (4乗数の数列) の階差数列を例とします。

0	1	16	81	256	625	1296	$M-4-0$
	1	15	65	175	369	671	$M-4-1$
	14	50	110	194	302		$M-4-2$
		36	60	84	108		$M-4-3$
			24	24	24		$M-4-4$
			0	0			

$M-4-0$	N^4
$M-4-1$	$4N^3 + 6N^2 + 4N + 1$
$M-4-2$	$12N^2 + 24N + 14$
$M-4-3$	$24N + 36$
$M-4-4$	24



$M-4-1$ は $(N+1)^4 - N^4$
 $4N^3 + 6N^2 + 4N + 1$

中1項は N^4 の微分をくり返す。

$$4N^3 \xrightarrow{(\div 1)} 4N^3 \xrightarrow{(\div 2)} 12N^2 \xrightarrow{(\div 6)} 24N \xrightarrow{(\div 24)} 24$$

$$4N^3 + 12N^2 + 24N + 1$$

等しくなる。
 主目

$(N+1)^4$ を $(N+a)^4$ とすると $N^4 + 4Na^3 + 6N^2a^2 + 4Na^3 + a^4$

となり h, h^2, h^3 の説明に使うことが出来ます。また M を変化

させても階乗(!) は表われます。階差数列の一般式を作る時に

使う階差の項数列の作り方に階乗(!) が含まれてはいるからです。

テイラー展開のアイデアで大切なことは、 $f(x+h)$ とした時の値を

$f(x)$ と $f'(x)$ と $f''(x)$ と... の和によつて表現することが出来るという

点にあります。 $(1+x)^a$ の級数展開の公式も階乗の部分や

$a, a(a-1), a(a-1)(a-2)$ の部分が含まれています。積極的に

に微分をくり返すとする所が重要で、 \sin, \cos の級数展開へと

発展することができました。

平方根の表 $\sqrt{1+a}$ を見なおします。

1	1
$+$ $\frac{a}{2}$	$+$ $\frac{1}{2}$
$-$ $\frac{a^2}{8}$	$-$ $\frac{1}{2 \times 4}$
$+$ $\frac{a^3}{16}$	$+$ $\frac{1 \times 3}{2 \times 4 \times 6}$
$-$ $\frac{5a^4}{128}$	$-$ $\frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6 \times 8}$
$+$ $\frac{7a^5}{256}$	$+$ $\frac{1 \times 3 \times 5 \times 7}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10}$

階乗の部分

$\times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1}$

$\times -\frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

$\times -\frac{3}{8} = -\frac{3}{2} \times \frac{1}{3}$

$\times -\frac{5}{16} = -\frac{5}{2} \times \frac{1}{4}$

$\times -\frac{7}{10} = -\frac{7}{2} \times \frac{1}{5}$

微分(-1)の部分

$\sqrt{X+a}$ として考えます。

$X^{\frac{1}{2}}$ \downarrow $+ \frac{1}{2} X^{-\frac{1}{2}}$ \downarrow $- \frac{1}{4} X^{\frac{1}{2}}$ \downarrow $+ \frac{3}{8} X^{-\frac{3}{2}}$ \downarrow $- \frac{15}{16} X^{-\frac{5}{2}}$ \downarrow $+ \frac{105}{32} X^{-\frac{7}{2}}$	$\frac{a}{1}$ $\frac{a^2}{2!}$ $\frac{a^3}{3!}$ $\frac{a^4}{4!}$ $\frac{a^5}{5!}$	$\sqrt{A^2+a}$ A $+ \frac{a}{2A}$ $- \frac{a^2}{8A^3}$ $+ \frac{a^3}{16A^5}$ $(16=2^4)$ $- \frac{5a^4}{128A^7}$ $+ \frac{7a^5}{256A^9}$ $(256=2^8)$	$\sqrt{25+a}$ 5 $+ \frac{1}{10} a$ $- \frac{1}{10^3} a^2$ $+ \frac{2}{10^5} a^3$ $- \frac{5}{10^7} a^4$ $+ \frac{14}{10^9} a^5$
---	---	---	---

立方根

$$\sqrt[3]{A^3+a} = A + \frac{a}{3A^2} - \frac{a^2}{9A^5} + \frac{5a^3}{81A^8} -$$

5乗根

$$\sqrt[5]{A^5+a} = A + \frac{a}{5A^4} - \frac{2a^2}{25A^9} + \frac{6a^3}{125A^{14}} -$$