2021.8.6

テイラー展開のアイディアの始まりは？

テイラー展開により三角関数が（ラジアン単位）で

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

というきれいな形の級数展開の公式で表現されることは、私にとって驚きでした。テイラー（Brook Taylor, 1685-1731）さんがどのようにしてこの考え方に至ったのかを私なりに考えてみました。

3つのことを手がかりにします。

① 微分法 ― 1次の近似式 の精度を良くするには？

$h \fallingdotseq 0$ のとき、 $f(a+h) \fallingdotseq f(a) + f'(a)h$

② 級数展開の具体例

(ア) 平方根の表の観察 $\sqrt{25+a} \longrightarrow \sqrt{1+a}$

(イ) パスカルの三角形の行間を読む。

③ N^M の階差数列の一般式の分析

ニュートン（1643-1726）さんは ①を利用した反復法 と②の(イ)を使った

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots \quad (|x|<1)$$

級数展開の公式は知っていました。テイラーさんがつけ加えたものを

理解する上で ③が役に立ちました。有限のテイラー展開です。

テイラー展開の公式は 大きく2つの部分に分けることができます。

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) +$$

$f(x) \rightarrow f'(x) \rightarrow f''(x) \rightarrow f'''(x)$ f(x)を次々と微分する。

$1 \rightarrow h \rightarrow \frac{h^2}{2!} \rightarrow \frac{h^3}{3!}$ 補正部分。

③ N^M $M=4$ (4乗数の数列)の階差数列を例とします。

0	1	16	81	256	625	1296	M-4-0
1	15	65	175	369	671		M-4-1
14	50	110	194	302			M-4-2
36	60	84	108				M-4-3
24	24	24					M-4-4
0	0						

階差0項数列

1	1	1	1
2	6	14	
6	36		
24			

M-4-0	N^4
M-4-1	$4N^3 + 6N^2 + 4N + 1$
M-4-2	$12N^2 + 24N + 14$
M-4-3	$24N + 36$
M-4-4	24

4×1	$\boxed{6\times1}$	4×1	$\boxed{1\times1}$
$\boxed{6\times2}$	4×6	$\boxed{1\times14}$	
4×6	$\boxed{1\times36}$		
$\boxed{1\times24}$			

M-4-1 は $(N+1)^4 - N^4$

$4N^3 + 6N^2 + 4N + 1$

第1項は N^4の微分をくり返す。

$4N^3 \rightarrow 12N^2 \rightarrow 24N \rightarrow 24$

$(\div 1)$ $(\div 2)$ $(\div 6)$ $(\div 24)$

$4N^3 + 6N^2 + 4N + 1$

等しくなる。

ココに着目

$(N+1)^4$ を $(N+a)^4$ とすると $N^4+4N^3a+6N^2a^2+4Na^3+a^4$ となり $h,\ h^2,\ h^3$ の説明に使うことができます。またMを変化させても階乗(!)は表われます。階差数列の一般式を作る時に使う階差0項数列の作り方に階乗(!)が含まれているからです。

テイラー展開のアイデアで大切なことは、$f(x+h)$ とした時の値を $f(x)$ と $f'(x)$ と $f''(x)$ と… の和によって表現することができるという点にあります。$(1+x)^a$ の級数展開の公式も階乗の部分や $a,\ a(a-1),\ a(a-1)(a-2)$ の部分が含まれています。積極的に微分をくり返すとする所が重要で、sin, cos の級数展開へと発展することができました。

平方根の表 $\sqrt{1+a}$ を見なおします。

1	1	
$+\frac{a}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{1}$
$-\frac{a^2}{8}$	$-\frac{1}{2\times4}$	$\times -\frac{1}{4} = -\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$
$+\frac{a^3}{16}$	$+\frac{1\times3}{2\times4\times6}$	$\times -\frac{3}{6} = -\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}$
$-\frac{5a^4}{128}$	$-\frac{1\times3\times5}{2\times4\times6\times8}$	$\times -\frac{5}{8} = -\frac{5}{2}\times\frac{1}{4}$
$+\frac{7a^5}{256}$	$+\frac{1\times3\times5\times7}{2\times4\times6\times8\times10}$	$\times -\frac{7}{10} = -\frac{7}{2}\times\frac{1}{5}$

階乗の部分

微分(−1)の部分

$\sqrt{X+a}$ として考えます。 $\sqrt{A^2+a}$ $\sqrt{25+a}$

$X^{\frac{1}{2}}$		A	5
$\downarrow$			
$+\frac{1}{2}X^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{a}{1}$	$+\frac{a}{2A}$	$+\frac{1}{10^1}a$
$\downarrow$			
$-\frac{1}{4}X^{-\frac{3}{2}}$	$\frac{a^2}{2!}$	$-\frac{a^2}{8A^3}$	$-\frac{1}{10^3}a^2$
$\downarrow$			
$+\frac{3}{8}X^{-\frac{5}{2}}$	$\frac{a^3}{3!}$	$+\frac{a^3}{16A^5}$ $(16=2^4)$	$+\frac{2}{10^5}a^3$
$\downarrow$			
$-\frac{15}{16}X^{-\frac{7}{2}}$	$\frac{a^4}{4!}$	$-\frac{5a^4}{128A^7}$	$-\frac{5}{10^7}a^4$
$\downarrow$			
$+\frac{105}{32}X^{-\frac{9}{2}}$	$\frac{a^5}{5!}$	$+\frac{7a^5}{256A^9}$ $(256=2^8)$	$+\frac{14}{10^9}a^5$

立方根

$$\sqrt[3]{A^3+a} = A + \frac{a}{3A^2} - \frac{a^2}{9A^5} + \frac{5a^3}{81A^8} -$$

5乗根

$$\sqrt[5]{A^5+a} = A + \frac{a}{5A^4} - \frac{2a^2}{25A^9} + \frac{6a^3}{125A^{14}}$$