2021.7.4

武田 利一 様

$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ を求める時に $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ と変形し 商の微分法を使って求めます。レポート(2014.2.2)「三角比の表の観察 P.17－P.20」の P.18 を思い出しました。$\tan 88.5°$を求める考え方の③です。①は$(\tan 88° + \tan 89°) \div 2$の計算をします。

②は $\tan 1.5°$を求めて$\tan 88.5°$に直す考え方です。

$$\tan 1.5° = \left(\frac{1}{\tan 88°} + \frac{1}{\tan 89°}\right) \div 2 = Ⓐ \quad \tan 88.5° = \frac{1}{Ⓐ}$$

三角比の表(高校数学の教科書)の数値を使う場合です。

$\tan 1° = 0.0175$ $\tan 2° = 0.0349$ $\tan 88° = 28.6363$ $\tan 89° = 57.2900$

②には2つの工夫があります。㋐tanのグラフは角度が小さいほど傾きがゆるやかです。直線で近似する場合は角度は小さいほど有利です。㋑tanの1°と2°の数値をそのまま使うのではなく、89°と88°を使います。有効数字が3桁でなく6桁だからです。③つ目は、精度を良くしたtan1°とtan2°の数値を使い sinとcosの1°と2°の数値を求め 平均して1.5°数値を求めます。これを88.5°に直し(sinとcosを入れかえる)tan88.5°を求める考え方です。②の改良として③を考えたのでこのようになりました。

tan88°とtan89°を使って直接 sinとcosの88°と89°を求め平均して88.5°を求めればもっと簡単に求めることができます。7年たった今

だから言えることで当時はそこまで考えるよゆうがありませんでした。

ここでのポイントは $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ におきかえるということでした。

分子と分母の ÷2 は約分でなくなりますので残りは.

$$\tan\frac{88^\circ+89^\circ}{2} \longleftrightarrow \frac{\sin 88^\circ + \sin 89^\circ}{\cos 88^\circ + \cos 89^\circ}$$

数値を変化させてもとても良い数値になりました。

$$\tan\frac{\alpha\pm\beta}{2} = \frac{\sin\alpha \pm \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$$

の公式のあることを思い出しました。この公式の使い方がわからなくてすっかり忘れていました。$\tan\dfrac{75^\circ-72^\circ}{2} = \tan 1.5^\circ$ を正5角形までの分析で求めることができました。レポート(2014.4.12)

レポート(2014.4.17)では小さな角度の弦を円弧で近似するヒッパルコス氏の考え方の誤差を調べるためにsinのかわりに(誤差がsinの約2倍になる)tanを使いました。半角の計算が簡単です。$\tan\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ を使います。レポート(2009.12.$^{3.8}_{11}$)

レポート(2014.4.17)のP.31-P.32は sin(0.25°)を円弧(π÷720)で近似した数値を使って tan cos sin の1°の数値を求めました。P.33-P.34の実験で $8=2^3$ が現われました。レポート(2014.5.6)で0°から1.5°までの三角比の表作りに応用しました。tan 1.5°の数値を使います。レポート(2021.6.30)P.2では $\sin 61^\circ = \sin(60^\circ+1^\circ)$ を求める方法を示しました。円弧を使っています。

$\sin 1^\circ, \tan 1^\circ$ の近似に
円弧を使うことで $f(a+h) \fallingdotseq f(a) + h f'(a)$ $h \fallingdotseq 0$ を使うことができたのだなと思いました。同様のことは log の場合にもありました。
レポート(2021.6.12) P.5 で ㋐常用対数 $\log_{10} N$ ㋑自然対数 $\log_e N$ ㋒初期の対数の作り方 $\log_{1.01} N$ を示しました。

㋒の精度を良くするには $1.01 \rightarrow 1.001 \rightarrow 1.0001$ とします。複利計算の表の分析から始まります。レポート(2019.3.21)に㋒の表の作り方を示しました。Nが1から20までの表を作り たし算でかけ算ができることを確かめました。1.01^{302} まで計算しました。あとになって思ったのですが、232までの数値で同じ数表が作れることがわかりました。1.1〜2.0までのN.を求め N(10) 231.41 を加えればよいからです。 N(10) 231.41 を N(10) 1.0000 にした方が計算には便利です。㋐が生まれました。
㋑がどのようにして生まれたのかとても興味深いテーマです。
㋑の形にすることで $\log_e x \fallingdotseq x$ の近似式を作ることができます。
$\log 1.001$ $(\log_e 1.001) \fallingdotseq 0.001$ (0.0009995003331)
磯野幸さんの書かれた「おどる数学」知泉書館(2003)の P.109-P.113「Newton(ニュートン)の式について 2次関数は3段目が一定」はとてもわかりやすく 階差を使って数列の一般項を求める考え方について説明しています。

$f(x)$
数列の0項に対応する階差数列 $f_1(0)$, $f_2(0)$ $f_3(0)$ を使います。一般にNewtonの式は　(P.113)

$f_1(x) = f(x+1) - f(x)$　$f_2(x) = f_1(x+1) - f_1(x)$

$f_3(x) = f_2(x+1) - f_2(x)$　$\cdots\cdots$　$f_n(x) = f_{n-1}(x+1) - f_{n-1}(x)$

とおくと

$$f(x) = f(0) + f_1(0)x + \frac{f_2(0)}{2!}x(x-1) + \frac{f_3(0)}{3!}x(x-1)(x-2)$$

$$+ \cdots\cdots + \frac{f_n(0)}{n!}x(x-1)(x-2)\cdots\cdots(x-n+1)$$

レポート(2021.5.22) P.6

と表されます。　この式を $(1+x)^a$ の級数展開の公式とくらべると形がよく似ていることがわかります。

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 +$$

$$f(x) = f(0) + f_1(0)x + \frac{f_2(0)}{2!}x(x-1) +$$

式の変形には目的があります。このよく似た形に意味があるのだと思いました。私は別の考え方をとりました。

ここで大切なことは、異なる視点を組み合わせ、さらに発展させるという前向きな姿勢です。

林　玲英