武田利一様　　2021.6.12

おいそがしい日々をすごされていると思います。お体に気をつけて下さい。

愛知県の方より 高校数学 数学Ⅲ 第5章「微分法」の第4節「いろいろな応用」の中の「4 関数の近似式」(P.194−P.195)を送っていただきました。ありがとうございます。レポートの題材として使うことにしました。

$\boxed{\text{1次近似式}\quad h \fallingdotseq 0 \text{ のとき、} f(a+h) \fallingdotseq f(a) + f'(a)h}$

ここから始まります。接線法です。(P.194)

㋐ 例29 $\sin(a+h) \fallingdotseq \sin a + h\cos a \quad h \fallingdotseq 0$

を使って $\underset{0.515038074}{\sin 31^\circ} = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right)$ の近似値を求めます。

$$\sin 31^\circ \fallingdotseq \sin\frac{\pi}{6} \quad 0.5 \quad \leftarrow \sin 30^\circ$$
$$+ \frac{\pi}{180} \quad +0.01745 \quad \leftarrow \pi \div 180$$
$$\times \cos\frac{\pi}{6} \quad \times 0.8660 \quad \leftarrow \cos 30^\circ$$
$$\fallingdotseq 0.5151$$

㋑

加法定理 $\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$

とくらべます。$\sin 1^\circ$ は小さい角度なのでヒッパルコスさんの考えにならい円周で近似します。

$$\sin 31^\circ = \sin(30^\circ + 1^\circ) = \sin 30^\circ \times \cos 1^\circ + \cos 30^\circ \cdot \sin 1^\circ$$

$$= 0.50000 \quad \leftarrow \text{正3角形の辺の長さより}$$
$$\times 0.99985 \quad \leftarrow \sqrt{1-A^2}$$
$$+ 0.86603 \quad \leftarrow \sqrt{1-0.5^2}$$
$$\times 0.01745333 \quad \leftarrow 3.1416 \div 180 \rightarrow A$$
$$= 0.515037$$

$\left[\begin{array}{l}\sin 1^\circ \\ 0.0174524064\end{array}\right]$

㋐と㋑をくらべます。

㋐ $\sin(a+h) \fallingdotseq \sin a + \underline{\underline{h}}\cos a \qquad h \fallingdotseq 0$

㋑ $\sin(a+b) = \sin a \cdot \underline{\cos b} + \underline{\underline{\sin b}} \cdot \cos a$

㋐には㋑の cos b がありません。

㋐の $\underline{\underline{h}}$ と㋑ $\underline{\underline{\sin b}}$ が対応しています。

例2では $(\sin x)' = \cos x$ を使っています。㋐は㋑の近似式なので $(\sin x)' = \cos x$ であることを確かめることができます。具体的な数値を使ってさらに調べます。

$\sin 61^\circ - \sin 60^\circ = 0.0085943$ $\quad \pi \div 180 \times \cos 60^\circ$ $\underline{0.008}266$

$\sin 46^\circ - \sin 45^\circ = 0.0122330$ $\quad \pi \div 180 \times \cos 45^\circ$ $\underline{0.012}34$

$\sin 31^\circ - \sin 30^\circ = 0.0150381$ $\quad \pi \div 180 \times \cos 30^\circ$ $\underline{0.015}11$

$\sin 60.1^\circ - \sin 60^\circ = 0.0008713$ $\quad \pi \div 1800 \times \cos 60^\circ$ $\underline{0.00087}266$

$\sin 45.1^\circ - \sin 45^\circ = 0.0012331$ $\quad \pi \div 1800 \times \cos 45^\circ$ $\underline{0.00123}4$

$\sin 30.1^\circ - \sin 30^\circ = 0.0015107$ $\quad \pi \div 1800 \times \cos 30^\circ$ $\underline{0.00151}1499$

hが1°の時は小数第3位まで

hが0.1°の時は小数第5位まで一致することがわかります。

問54は $h \fallingdotseq 0$ のときの $\cos(a+h)$ の1次の近似式を作り

$\cos 44^\circ$ の近似値を求めることをテーマとしています。

$\cos 44^\circ = \sin 46^\circ = 0.7193398$ なのでまず $\sin 46^\circ$ を求めます。

$\sin 46^\circ = \sin(45^\circ + 1^\circ) \fallingdotseq \sin\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi}{4}$ ← ウ

$= 0.7071 + 0.01745 \times 0.7071 = \underline{\underline{0.7194}}$

小数第3位まで一致しています。次に $\cos 44^\circ$ を求めます。

$\cos 44^\circ = \cos(45^\circ - 1^\circ) \fallingdotseq \cos\frac{\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{180}\right)\left(-\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ← エ

ウとエを対応させようとすると $(\cos x)' = -\sin x$ となります。

$\cos 29^\circ$ を求めます。 $\cos 29^\circ = 0.87461970 7$

$\cos 29^\circ = \cos(30^\circ - 1^\circ) \fallingdotseq \cos\frac{\pi}{6} + \left(-\frac{\pi}{180}\right)\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$\fallingdotseq 0.8660 + (-0.01745) \times (-0.5) = \underline{\underline{0.8747}}$

小数第3位まで一致しました。

$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ を使うことで

$\sin(a+h)$ と $\cos(a+h)$ の一次近似式を作ることができました。微分法による関数の1次の近似式（接線法）のすごさは応用力だと思いました。 $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

考え方は①関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ ② $\lim_{h \to 0}$

h が十分に0に近いとき③ $\left[f'(a) \fallingdotseq \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right]$ を変形します。

問57 (3) は log 1.001 の近似値を求めます。

関数電卓を使います。

$\log 1.001 \quad 4.340774793 \times 10^{-4}$ ㋐

$\ln 1.001 \quad 9.995003331 \times 10^{-4}$ ㋑

下を使います。

$$
\begin{array}{lr}
0.000\,999\,500\,333 & \\
0.001 & 0.001^{1} \div 1 \\
-\,0.000\,0005 & -\,0.001^{2} \div 2 \\
0.000\,000\,000\,333 & 0.001^{3} \div 3
\end{array}
$$

$\ln 1.01 \quad 9.950330853 \times 10^{-3}$

$\ln 10 \quad 2.302585093 = \ln 2 \div \log 2 = \ln 5 \div \log 5$

対数表作りの実験　㋐と㋑と㋒を比べると　㋑と㋒が似てると思いました。

$1.01^{x} \fallingdotseq N$ — Nは1から20までの表を作りました。—— ㋒

N	$x \div x_{(10)}^{231.41}$	N	x	N	x
1	0.0000	1	0	11	240.97
2	0.3010	2	69.66	12	249.73
3	0.4771	3	110.41	13	257.77
4	0.6020	4	139.32	14	265.22
5	0.6990	5	161.75	15	272.16
6	0.7781	6	180.07	16	278.64
7	0.8451	7	195.56	17	284.73
8	0.9031	8	208.98	18	290.48
9	0.9542	9	220.82	19	295.91
10	1.0000	10	231.41	20	301.07

4 関数の近似式

関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ は,

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

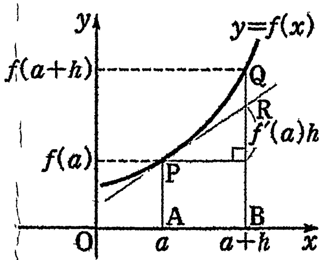
であり, h が十分0に近いときは,

$$f'(a)\fallingdotseq\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

となるから,

$$f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h$$

と考えられる。



したがって, $f(a+h)$ は次のように h の1次式で近似される。

1次の近似式

$h\fallingdotseq 0$ のとき,　$f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h$

例29 $h\fallingdotseq 0$ のときの $\sin(a+h)$ の1次の近似式を作ってみよう。
$(\sin x)'=\cos x$ であるから, $h\fallingdotseq 0$ のとき,

$$\sin(a+h)\fallingdotseq\sin a+h\cos a$$

例29の近似式を使うと, $\sin 31^\circ=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right)$ の近似値は,

$$\sin 31^\circ\fallingdotseq\sin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi}{6}$$

$$\fallingdotseq 0.5+0.01745\times 0.8660\fallingdotseq 0.5151$$

注 実際には, $\sin 31^\circ=0.5150\cdots\cdots$ であり, この値は小数第3位まで一致していることがわかる。

問54 $h\fallingdotseq 0$ のときの $\cos(a+h)$ の1次の近似式を作り, $\cos 44^\circ$ の近似値を求めよ。

前ページの1次の近似式で, $a=0$ の場合を考え, h を x と書きかえると, 次の近似式が得られる。

$x\fallingdotseq 0$ のとき,　$f(x)\fallingdotseq f(0)+f'(0)x$

例30 $x\fallingdotseq 0$ のときの $f(x)=(1+x)^r$ の1次の近似式を作ってみよう。

$$f'(x)=r(1+x)^{r-1}$$

で, $f(0)=1$, $f'(0)=r$ であるから,

$x\fallingdotseq 0$ のとき,　$(1+x)^r\fallingdotseq 1+rx$

例題18 $x\fallingdotseq 0$ のとき, $\sqrt[3]{1+x}$ の1次の近似式を作れ。また, それを使って, $\sqrt[3]{8.1}$ の近似値を求めよ。

解 $\sqrt[3]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{3}}$ であるから, $x\fallingdotseq 0$ のとき,

$$\sqrt[3]{1+x}\fallingdotseq 1+\frac{1}{3}x$$

$$\sqrt[3]{8.1}=\sqrt[3]{8+0.1}=\sqrt[3]{8(1+0.0125)}=2\sqrt[3]{1+0.0125}$$

$$\fallingdotseq 2\left(1+\frac{1}{3}\times 0.0125\right)\fallingdotseq 2.0083$$

注 $\sqrt[3]{8.1}$ の真の値は, $\sqrt[3]{8.1}=2.00829885\cdots\cdots$ で, 上の例題18の結果は, この値のよい近似値になっている。

問55 $\sqrt[3]{1.01}$ および $\sqrt[3]{65}$ の近似値を求めよ。

問56 $x\fallingdotseq 0$ のとき, 次の関数の1次の近似式を作れ。

(1) e^x　(2) $\tan x$　(3) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$　(4) $\log(1+x)$

†**問57** 次の値の近似値を求めよ。

(1) $\tan 1^\circ$　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{8.99}}$　(3) $\log 1.001$