2021.5.30

武田利一 様

愛知県の方より ニュートン・ラフソン法についての御意見をいただきました。ありがとうございます。少し整理してみました。

レポート(2004.7.18) 立方根の求め方について.

レポート(2015.7.22) 等比数列の和およびニュートン法

が対応します。ニュートン・ラフソン法は $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

の反復法で二次収束します。

計算方法	$1/N$を求める	平方根を求める
1 桁ずつ求める	筆算による割り算	開平法 ②
1 次収束	等比数列の和を使う	ボンベリ式の連分数 ④
ニュートン・ラフソン法 2 次収束	$x_{n+1}=x_n(2-ax_n)$	$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$ ①と同等

平方根, 立方根, 5乗根…の場合は、平均の考え方で説明することができます。ところが、$y^3-2y-5=0$ $a^3-2a=5$ の場合には接線, 微分を使った考え方が必要になります。と同時に、$1/N$ の計算も同じ考え方で計算できる一般化された改良された式になりました。

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

シンプルで力強い反復法の式だと思います。

$\sqrt[2.3]{1.05} \fallingdotseq 1+\frac{0.05}{2.3} = \boxed{1.021}739$ 接線法

$\frac{3.3\times 1.05+1.3}{1.3\times 1.05+3.3} = \frac{4.765}{4.665} = \boxed{1.02143}6$ 双曲線近似法

$(1+x)^a \fallingdotseq 1+ax \qquad X^{\frac{1}{N}} \fallingdotseq \frac{(N+1)X+(N-1)}{(N-1)X+(N+1)}$

1.021439712420837 へと精度を良くする考え方は反復法ではなく級数展開⑩の考え方でした。

級数展開の公式 $(|x|<1)$

$$(1+x)^a = 1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+\cdots$$

$$(1+0.05)^{\frac{10}{23}} = 1+\frac{10}{23}\times 0.05+\frac{\frac{10}{23}\times\left(-\frac{13}{23}\right)}{2}\times 0.05^2$$

$$+\frac{\frac{10}{23}\times\left(-\frac{13}{23}\right)\times\left(-\frac{36}{23}\right)}{2\times 3}\times 0.05^3+\frac{\frac{10}{23}\times\left(-\frac{13}{23}\right)\times\left(-\frac{36}{23}\right)\times\left(-\frac{59}{23}\right)}{2\times 3\times 4}\times 0.05^4$$

1	1
+ 0.0217391304 3	1.0217
− 0.0003071833 6	1.021431 9
+ 0.0000080134 7	1.0214399605 4
− 0.0000000256 95	1.0214397035 9

一歩一歩にじりよっていく計算方法、考え方だと思いました。

林　邦英