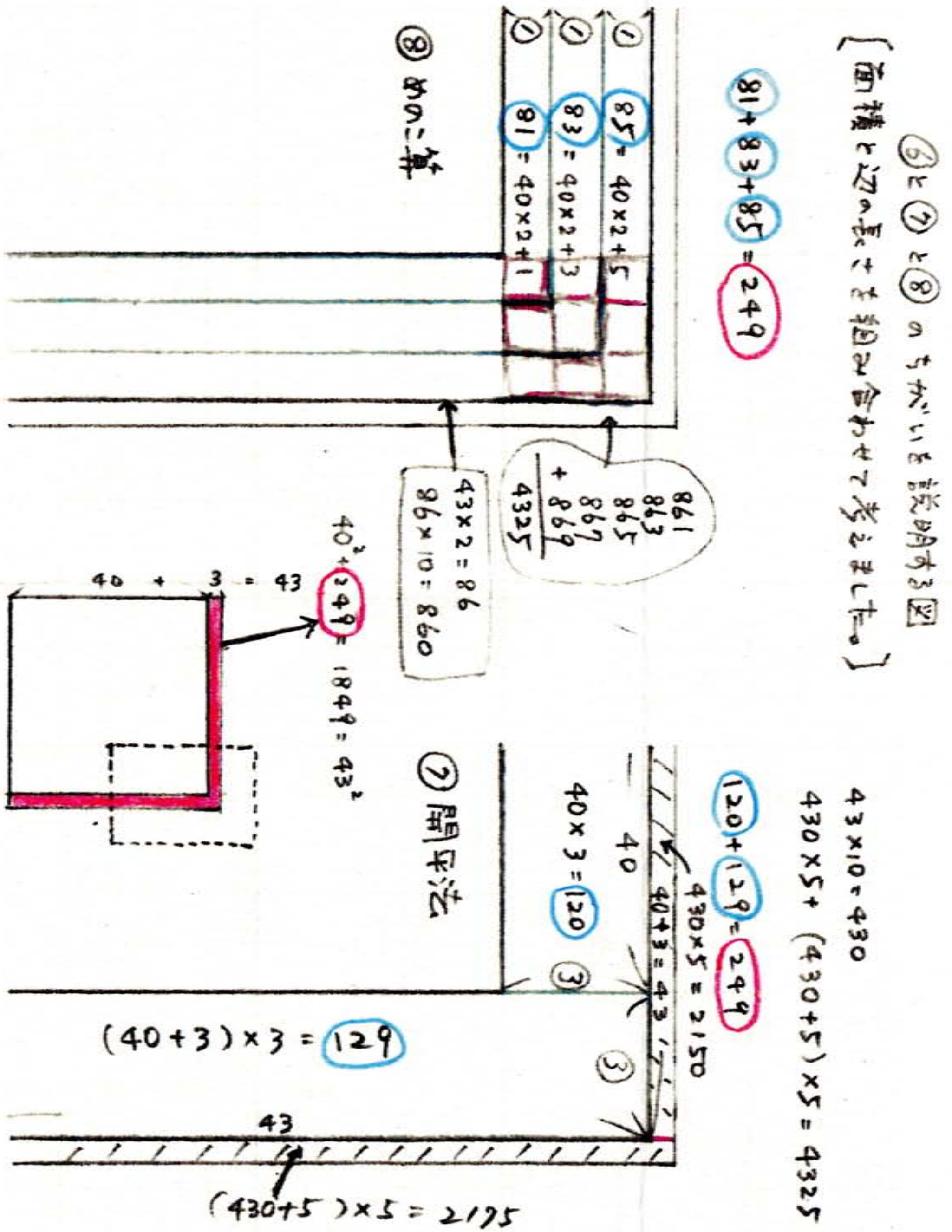
2021.5.22

武田 利一 様

おいそがしい日々をすごされていると思います。お体に気をつけて下さい。

平方根を求める考え方あれやこれやを冊子の形にしました。表紙は電卓を使って簡単にできる実験の紹介です。⑤に対応します。裏表紙は⑥⑦⑧を説明する図にしました。⑦開平法の原理を理解する上で3つをセットにした方がわかりがよいと思ったからです。⑨と⑩は級数に至る考え方としました。級数展開の公式をP.6の上に示しました。テイラー級数のすぐ手前にたどりつきました。

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)\cdots$$ テイラー級数




⑤ $\sqrt{19}$ の観察（12桁の電卓を使って）

19 √ 　　 4.35889894354
− 4 = 　0.35889894354
÷ = 　　2.78629964785
− 2 = 　0.78629964785
÷ = 　　1.2717797887
− 1 = 　0.2717797887
÷ = 　　3.67944947188
− 3 = 　0.67944947188
÷ = 　　1.47177978847
− 1 = 　0.47177978847
÷ = 　　2.11963298225
− 2 = 　0.11963298225
÷ = 　　8.35889886879
− 8 = 　0.35889886879

# 平方根を求める考え方 あれやこれや

① $\frac{a+b}{2} > \sqrt{a\cdot b} > \frac{2\cdot a\cdot b}{a+b}$

$\left(\frac{35}{8}=4+\frac{3}{8}\right)$

$19=4\times\frac{19}{4}$

$19=4^2+3$

$\frac{4+\frac{19}{4}}{2}=\frac{35}{8}$ $\quad \frac{\frac{35}{8}+\frac{19\times8}{35}}{2}=\frac{2441}{560}$

$4^2-19\times1^2=-3$

$35^2-19\times8^2=9$

$2441^2-19\times560^2=81$

② $A+\frac{x}{2A} > \sqrt{A^2+x} > A+\frac{x}{2A+1}$

A ① ② ③ ④ 5

1 4 9 16 25

2A+1 3 5 7 9

$\left(4+\frac{3}{8}\right)^2=19.14$ $\quad \left(4+\frac{3}{9}\right)^2=18.78$

$4+\cfrac{x}{8+\cfrac{x}{9}}$ $\quad 16<4^2+x<25$

$0<x<9$

$4+\cfrac{3}{8+\cfrac{3}{9}}=\frac{109}{25}$ $\quad \left(\frac{109}{25}\right)^2=19.01$

③ $\sqrt{A^2+x} < A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+1}}$

$6+\cfrac{x}{12+\cfrac{x}{13}}$ $\quad 36<6^2+x<49$

$0<x<13$

$\sqrt{1+x}\fallingdotseq 1+\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{2}}=1+\frac{2x}{4+x}$

双曲線近似法

④ $\sqrt{A^2+x}=A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+}}}$

$\frac{4}{1}\to 4+\cfrac{3}{8+\cfrac{3}{8+\cfrac{3}{8+\cfrac{3}{8+}}}}$

$\frac{35}{8}$ $\quad \frac{292}{67}$ $\quad \frac{2441}{560}$ $\quad \frac{20404}{4681}$

$292^2-19\times67^2=-27$

$20404^2-19\times4681^2=-243$

最良近似分数

⑤ $\sqrt{19}\fallingdotseq\frac{170}{39}$

$170^2-19\times39^2=1$

$57799^2-19\times13260^2=1$

$\frac{\frac{170}{39}+\frac{19\times39}{170}}{2}=\frac{57799}{13260}$

$\sqrt{19}=4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{2+}}}}}}}$

$\frac{9}{2}\to$ $\quad \frac{13}{3}\to$ $\quad \frac{48}{11}\to$ $\quad \frac{61}{14}\to$ $\quad \frac{170}{39}$

$9^2-19\times2^2=5$

$13^2-19\times3^2=-2$

$48^2-19\times11^2=5$

$61^2-19\times14^2=-3$

4 2 1 3 1 2 8

$4\times2=8$

周期の発見



① $\frac{a+b}{2} > \sqrt{a\cdot b} > \frac{2\cdot a\cdot b}{a+b}$ 両辺を加える ①' $\frac{a+b+2\cdot a\cdot b}{2+a+b} < \sqrt{a\cdot b}$

$(a\cdot b\to1)$

$\frac{21}{20}=\frac{\frac{10}{10}+\frac{11}{10}}{2} > \sqrt{\frac{10}{10}\cdot\frac{11}{10}} > \frac{20\cdot11}{21\cdot10}=\frac{22}{21}$ $\quad \frac{a+b+2\cdot1}{2+a+b}=1=\sqrt{1}$

$\frac{21+22}{20+21}=\frac{43}{41}=1+\frac{2}{41}$

$\sqrt{1+0.1} > 1+\frac{2\times0.1}{4+0.1}=1+\frac{2}{41}$

$\sqrt{1+x} > 1+\frac{2x}{4+x}=1+\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{2}}$

②' $A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A}} < \sqrt{A^2+x} < A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+1}}$

$\frac{11}{10}$ $\quad 11+10=21$ $\quad 21\times2=42$ $\quad 42^{+1}_{-1}$ $\frac{43}{41}$ $\quad 11-10=1$

$\frac{43}{41}+\frac{1}{10\times2\times43\times41}$

$\frac{13}{10}$ $\quad 13+10=23$ $\quad 23\times2=46$ $\quad 46^{+3}_{-3}$ $\frac{49}{43}$ $\quad 13-10=3$

$\frac{49}{43}+\frac{27}{10\times2\times49\times43}$ $\quad 3^3=27$

③'' $A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A}}} > \sqrt{A^2+x} > A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+1}}}$

$\sqrt{19}=\sqrt{4^2+3}$

$\frac{1}{0}$ $\quad \frac{4}{1}$ $\quad$ 3/8 $\frac{3+32}{0+8}=\frac{35}{8}$ $\quad$ 3/8 $\frac{12+280}{3+64}=\frac{292}{67}$ $\quad$ 3/8 $\frac{105+2336}{24+536}=\frac{2441}{560}$ (19.0002…) $\quad$ 3/9 $\frac{105+2628}{24+603}=\frac{2733}{627}$ (18.9995…)

④ $\sqrt{A^2+x}=A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+}}}}}}$

$\sqrt{2}=1+\sqrt{2}-1$

$=1+\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1}$

$=1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}$

$=1+\frac{1}{2+\sqrt{2}-1}$

$\sqrt{7}=2+\sqrt{7}-2$

$=2+\frac{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}{\sqrt{7}+2}$

$=2+\frac{3}{\sqrt{7}+2}$

$=2+\frac{3}{4+\sqrt{7}-2}$

ラファエル・ボンベリさん(1526-1572)が証明した連分数をさかのぼる

④ $\sqrt{A^2+x} = A + \cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+}}}}}$

無限の連分数により、等号は成立する。

$\sqrt{7} = 2 + \boxed{\sqrt{7}-2}$

$= 2 + \frac{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}{\sqrt{7}+2}$

$= 2 + \frac{3}{\sqrt{7}+2}$

$= 2 + \frac{3}{4+\boxed{\sqrt{7}-2}}$

③''の左辺が独立して④になる。

③'' $A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A}}} > \sqrt{A^2+x} > A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+1}}}$ $(0<x<2A+1)$

2A+1は1つだけ　区間近似式

精度を良くするために 一段多くつみあげる。不等号の向きは逆になる。

③' $A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A}} < \sqrt{A^2+x} < A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+1}}$ $(0<x<2A+1)$

左辺を作り、不等号を完成させる。

③ $\sqrt{A^2+x} < A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+1}}$ $(0<x<2A+1)$

xの変化による傾きの変化に対応するため、左辺と右辺を1つにした式にする。

② $A+\frac{x}{2A} > \sqrt{A^2+x} > A+\frac{x}{2A+1}$ $(0<x<2A+1)$

$\boxed{0-2}$ の左辺は $\boxed{0-1}$ の変形　数値分析

$\boxed{0-1}$ 大きい不等式　$\frac{a+b}{2} > \sqrt{a\cdot b}$ $\Rightarrow$ $A+\frac{x}{2A} > \sqrt{A^2+x}$

積の形

$7=2\times\frac{7}{2}$　$\sqrt{2\times\frac{7}{2}} < \frac{11}{4} = 2+\frac{3}{4} = \boxed{2+\frac{3}{2\times2}}$

$\boxed{0-2}$ 小さい不等式　$(0<x<2A+1)$　$\sqrt{A^2+x} > A+\frac{x}{2A+1}$　ちがいは +1

和の形

$7=2^2+3$　$\sqrt{2^2+3} > 2+\frac{3}{5} = \boxed{2+\frac{3}{2\times2+1}}$

$\boxed{0-0}$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| | ↑ | ↑ | ↑ | ↑ | ↑ | ↑ | ↑ | ↑ | ↑ |
| $N^2$ | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 |
| (差) | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | ← 2N+1 |

$4 < \sqrt{20} < 5$　$20 = 4\times5 \rightarrow \boxed{0-1}$　$(4.5)^2 = 20.25$

$4 < \sqrt{19} < 5$　$19 = 4^2+3 \rightarrow \boxed{0-2}$　$(4\frac{3}{9})^2 = 18.78$



⑥・⑦・⑧は
1桁ずつ求める考え方

⑥

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 41 | 16- | 431 | 185- | 4351 | 1893- |
| 2 | 4 | 42 | 17- | 432 | 186- | 4352 | 1893- |
| 3 | 9 | 43 | 18- ← | 433 | 187- | 4353 | 1894- |
| 4 | 16 ← | 44 | 19- | 434 | 188- | 4354 | 1895- |
| 5 | 25 | | | 435 | 189- ← | 4355 | 1896- |
| | | | | 436 | 190- | 4356 | 1897- |
| | | | | | | 4357 | 1898- |
| | | | | | | 4358 | 1899- ← |
| | | | | | | 4359 | 1900- |

$\sqrt{19} = 4.358\cdots$

⑦ 開平法

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 4 | | 4. 3 5 8 8 |
| | +4 | 4×4 | 19 |
| 8=4×2 | 83 | | -16 |
| | +3 | 83×3 | 300 |
| 86=43×2 | 865 | | -249 |
| | +5 | 865×5 | 5100 |
| 870=435×2 | 8708 | | -4325 |
| | +8 | 8708×8 | 77500 |
| | 87168 | | -69664 |
| | +8 | 87168×8 | 783600 |
| | 87176 | | -697344 |
| | | | 86256 |

⑧ $19-4^2=3$　めのこ算

4

| | |
|---|---|
| | 300 |
| ① | −81 |
| | 219 |
| ② | −83 |
| | 136 |
| ③ | −85 |
| | 51 |

43

| | |
|---|---|
| | 5100 |
| ① | −861 |
| | 4239 |
| ② | −863 |
| | 3376 |
| ③ | −865 |
| | 2511 |
| ④ | −867 |
| | 1644 |
| ⑤ | −869 |
| | 775 |

435

| | |
|---|---|
| | 77500 |
| ① | −8701 |
| | 68799 |
| ② | −8703 |
| | 60096 |
| ③ | −8705 |
| | 51391 |
| ④ | −8707 |
| | 42684 |
| ⑤ | −8709 |

4358

| | |
|---|---|
| | 33975 |
| ⑥ | −8711 |
| | 25264 |
| ⑦ | −8713 |
| | 16551 |
| ⑧ | −8715 |
| | 7836 |

$81 = 4\times2\times10+1$

$861 = 43\times2\times10+1$

$8701 = 435\times2\times10+1$

## ⑨と⑩は級数に至る考え方

## 級数展開 $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots$ $(|x|<1)$

### ⑨ 平方根の表の観察

0.5 $+\frac{1}{2}$

$-0.125$ $-\frac{1}{8}$

$0.0625 + \frac{1}{16}$ ?

$\sqrt{1+a}$ の場合

| | |
|---|---|
| 1.01 | 1.0049875621120 89 |
| 1.001 | 1.000499875062461 |
| 1.0001 | 1.00004999875006 2 |

$\sqrt{25+a}$

| | ㋐ | ㋑ | ㋒ | ㋓ | ㋔ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| a = 1 | 5. 09 | 9 | 01 | 95 | 13 | 59 |
| a = 2 | 5. 19 | 6 | 15 | 24 | 22 | 70 |
| a = 3 | 5. 29 | 1 | 50 | 26 | 22 | 12 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ㋐ | 1 2 3 | $\times 10^{-1}$ | | | |
| ㋑ | −1 −4 −9 | $\times 10^{-3}$ | $-1^2$ | $-2^2$ | $-3^2$ |
| ㋒ | 2 | $\times 10^{-5}$ | $2\times1^3$ | $2\times2^3=16$ | $2\times3^3=54$ |
| ㋓ | −5 | $\times 10^{-7}$ | $-5\times1^4$ | | |
| ㋔ | 14 | $\times 10^{-9}$ | $14\times1^5$ | | |

$$\sqrt{5^2+a} = 5 + \frac{a}{10} - \frac{a^2}{10^3} + \frac{2a^3}{10^5} - \frac{5a^4}{10^7} + \frac{14a^5}{10^9} -$$

$$= 5 + \frac{a}{2\cdot5} - \frac{a^2}{2^3\cdot5^3} + \frac{2a^3}{2^5\cdot5^5} - \frac{5a^4}{2^7\cdot5^7} + \frac{14a^5}{2^9\cdot5^9} -$$

$\sqrt{5^2+a}$ を $\sqrt{1+a}$ に変えると

$$\sqrt{1+a} = 1 + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{2^3} + \frac{2a^3}{2^5} - \frac{5a^4}{2^7} + \frac{14a^5}{2^9} -$$

$$\boxed{\sqrt{1+a} = 1 + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{8} + \frac{a^3}{16} - \frac{5a^4}{128} + \frac{7a^5}{256} -}$$

$$-\frac{1}{8} = -\frac{1}{2\times4} \qquad \frac{1}{16} = \frac{1}{2\times4\times2} = \frac{1\times3}{2\times4\times6}$$

$$-\frac{5}{128} = -\frac{5}{2\times4\times2\times8} = -\frac{1\times3\times5}{2\times4\times6\times8}$$

$$\frac{7}{256} = \frac{7}{2\times4\times2\times8\times2} = \frac{1\times3\times5\times7}{2\times4\times6\times8\times10}$$

$(\times3)\ 6 \quad (\times5)\ 10$

係数の規則性は?

### ⑩ パスカルの三角形の行間を読む

A
B 1 ← $(a+b)^{0.5}$ $(a+b)^0$ の係数
C 1 1 $(a+b)^1$
D 1 2 1 $(a+b)^2$
E 1 3 3 1 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
1 4 6 4 1 $(a+b)^4$
1 5 10 10 5 1 $(a+b)^5$

左へ延ばすと

| (N) | −4 | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| B | −4 | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | N |
| C | 6 | 3 | 1 | 0 | 0 | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | $\frac{1}{2}N(N+1)$ |
| D | −4 | −1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | $\frac{1}{6}N(N+1)(N+2)$ |
| E | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 15 | 35 | 70 | $\frac{1}{24}N(N+1)(N+2)(N+3)$ |

[0]を使うと(N+3)(N+2)(N+1) (N)の成分のあることがわかる。

基準線の転換

| (N) | −4 | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| B | −4 | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | N |
| C | 10 | 6 | 3 | 1 | 0 | 0 | 1 | 3 | 6 | 10 | $\frac{1}{2}N(N-1)$ |
| D | −20 | −10 | −4 | −1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 10 | $\frac{1}{6}N(N-1)(N-2)$ |
| E | 35 | 15 | 5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | $\frac{1}{24}N(N-1)(N-2)(N-3)$ |
| F | −56 | −21 | −6 | −1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | $\frac{1}{120}N(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)$ |

↑ 0.5

$120 = 1\times2\times3\times4\times5$

$N = \frac{1}{2}$

$A = 1 \quad B = \frac{1}{2} \quad C = -\frac{1}{8} \quad D = \frac{1}{16} \quad E = -\frac{5}{128}$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{5}{128}x^4 +$$

$N = \frac{1}{3} \quad A = 1 \quad B = \frac{1}{3} \quad C = -\frac{1}{9} \quad D = \frac{5}{81} \quad E = -\frac{10}{243}$

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{9}x^2 + \tfrac{5}{81}x^3 - \tfrac{10}{243}x^4 +$$

立方根への応用