2021.3.23

武田利一様

おいそがしい日々をすごされていると思います。お体に気をつけて下さい。

幻の0番法について書かれている所を読み直しました。

㋐ 質問<319>金子「幻の0番法???」の返事（2000・9・14）

㋑ レポート 2003.7.29「私の数学教育32年間の変遷」1 幻の0番法 数列の一般項

㋒ レポート 2012・4・1「数列の一般項を『幻の0番法』で求める」『数列の一般項』を等差数列やΣ計算を使わないで求める方法（幻の0番法）

数列の始まりを[1]にするのか[0]にするのかを考える背景について考えようとすると

自然数 ― 整数 ― 有理数 ― 無理数 ― 実数 ― 虚数 ― 複素数
　　　↑

の[↑]の部分が問題になります。私は階差を作るという数列の分析方法と関係があると考えています。[↓]の部分です。

　　　　　　　　　　　　　↓
式の計算 ― 方程式 ― 関数 ― 差分・和分 ― 微分・積分

関数は負数 ― 0 ― 正数と変化させますが 0の場合の階差の数列を使うことがもっとも効率的になります。数列の一般項を求めるのにつごうがよいという考え方から数列の始まりを[0]にすることになったと思います。

数列の始まりを[1]とする考え方はそれ以前の考え方で前提とする条件は少くなります。自然数の冪和のテーマは古くからあったと思います。錐体の体積の $\frac{1}{3}$ の説明に平方数の数列の和の公式が必要となるからです。

自然数の冪和の公式の研究 ― ベルヌーイ数への道と考えます。

パスカルの三角形の分析でわかること

三角数 $S(1)-n$ の表 の観察

n		0		1		2
1		1		1		1
1		2	の	3		4
1	の	3	和 →	$\boxed{6}$	の 和	10
1	和	4		10	→	$\boxed{20}$
1	→	$\boxed{5}$		15		35

左右の数列を和の形で調べると

左の数字の和が 右の数列にあらわれます。

$1+3+6+10=20$

一般項の式は 左右の数列を積の形（比）で調べることで求めることができます。

$$1 \qquad \frac{N}{1} \qquad \frac{N(N+1)}{1\cdot 2} \qquad \frac{N(N+1)(N+2)}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{N^3+3N^2+2N}{6}$$

$\frac{N(N+1)}{1\cdot 2}=\frac{N^2}{2}+\frac{N}{2}$ の和の式が $\frac{N^3}{6}+\frac{N^2}{2}+\frac{N}{3}$ になります。

$\frac{N^3}{6}+\frac{N^2}{2}+\frac{N}{3}$ より $\frac{N}{2}$ の和の式をとりのぞくと $\frac{N^2}{2}$ の和の式になります。

$$\left(\frac{N^3}{6}+\frac{N^2}{2}+\frac{N}{3}\right)$$

$$-\left(\frac{N^2}{4}+\frac{N}{4}\right) \quad \leftarrow \frac{N}{2}\text{の和の式}$$

$$\frac{N^3}{6}+\frac{N^2}{4}+\frac{N}{12} \quad \leftarrow \frac{N^2}{2}\text{の和の式}$$

$$\downarrow \times 2$$

$$\frac{N^3}{3}+\frac{N^2}{2}+\frac{N}{6} \quad \leftarrow N^2\text{の和の式}$$

- Nの和の公式を求めるために（$N-1$）までの和の公式を使います。
- 和の公式をまるごと使って分析する方法です。
- 式を使って和の公式を求めるもっとも基本となる考え方です。

$(k+1)^n-k^n$ と「打ち消しあう」考え方を使う方法はこの考え方が元になっています。 和の公式をまるごと使って分析します。

S_nの和の公式を求めるために S_{n-1} までの和の公式を必要とします。

① 等差数列や等比数列を学んだあとに出てくる「階差数列」の特長を調べている中で、数列の一般項が、初項の前の0番目に出てくる数字によってある程度判断できるということから教材化したのが、「幻の0番法」である。このアイデアはニュートンの前進補間公式に出ているし、……

一般にNewtonの式は
$$f_1(x)=f(x+1)-f(x)$$
$$f_2(x)=f_1(x+1)-f_1(x)$$
$$f_3(x)=f_2(x+1)-f_2(x)$$
$$\vdots$$
とおくと
$$f_n(x)=f_{n-1}(x+1)-f_{n-1}(x)$$

$$f(x)=f(0)+f_1(0)x+\frac{f_2(0)}{2!}x(x-1)+\frac{f_3(0)}{3!}x(x-1)(x-2)+\cdots\cdots+\frac{f_n(0)}{n!}x(x-1)(x-2)\cdots\cdots(x-n+1)$$

と表わされます。

この式の中から $f(0)$, $f_1(0)$, $f_2(0)$, … だけをとりだします。

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

$$f(0)=c$$
$$f_1(0)=a+b$$
$$f_2(0)=2a$$

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

$$f(0)=d$$
$$f_1(0)=a+b+c$$
$$f_2(0)=6a+2b$$
$$f_3(0)=6a$$

2次式と3次式の場合です。

ここから直接 $a\to b\to c$ の順に求めます。一次方程式になりました。

数列を〔0〕から考えることの有利さは、㋒で等差数列やΣ計算を使う方法と「幻の0番法」による方法とを対比させる形でわかりやすく示しています。

3次式の場合はもっとちがいがはっきりします。

「幻の0番法」は1980年代に作られました。私よりも10年以上前の研究です。
階差数列と一般項の関係を調べ初項の前の「0番」に着目しました。
私は数列の0項に着目するという考え方を知り、自然数の冪和のテーマについて考え直しました。2000年のことです。4次式以上の場合にも使える方法を作りました。
計算は表を作って引き算をします。次数ごとの成分の決定法が一番の改良点です。
① <資料①> に差分・和分についてふれています。私も同感です。
微分・積分とくらべて差分・和分は式が複雑になります。分析に「0番」は役立ちます。

林 邦英