2021.3.7

武田利一様

おいそがしい日々をすごされていると思います。お体に気をつけて下さい。

「13乗数の数列の和の公式の求め方 STEP1よりSTEP4」を作りました。

3冊の本を参考にしました。①「ベルヌーイ数とゼータ関数」(牧野書店 2001)

私はこの本で Jacob Bernoulli (1654-1705) さん(スイス) が和の形で分析したこと、

これより前に Johann Faulhaber (1580-1635) さん(ドイツ) が積の形で分析したこと

を知りました。和の形より積の形の方が早かったのには理由がありました。比を求めるアイディアです。

[STEP1] 表紙の赤で囲った部分です。等差数列の性質を利用して求めます。

表紙の残りの部分が[STEP2]です。「比を調べる」「分母を3にする(分母をそろえる)」

ことにより平方数の和の公式の一部分 $\frac{1}{3}\cdot(2n+1)$ がわかります。同様にして立方根

の場合も求めることができます。「数列と数列との比を調べること」と「分母をそろえること」

は和の公式を求める上で大切な役割をもっています。

[STEP3] は異なる方法や考え方を組み合わせて4乗数以上の場合の和の公式

を求めることです。P.1-P.2 では比を調べてみようというアイディアで4乗数の和

と5乗数の和の公式を求めました。比の階差が等差数列となることを利用する

方法があります。階差数列の和を使う方法です。6乗数以上では計算が複雑にな

ります。北海道と九州の方に教えていただきました。階差0項数列を使わない方法です。

P.4下の「N=10までの和の数値の素因数分解の表」を見ると、積の形の方が和の形

よりも先行した理由がわかります。比を利用すると積の形になるからです。

和の形の分析例をP.5−P.6で示しました。循環小数の知識を要求されます。

第1項〜第3項の係数の分析は和の形で可能になりました。

〔STEP4〕の始まりを赤で囲みました。P.3上の「第4項の観察」です。

参考にした本②は「数学文化10号 特集=関孝和−没後300年記念」(2008)のP.51−P.66「自然数の冪乗の和とベルヌーイ数−ベルヌーイと関の考えたこと」です。四日市大学の小川東先生が書かれたものです。P.63「両者ともに二項係数の表によって自然数の冪乗の和の計算に成功した」とあるのが〔STEP4〕の始まりを第4項の観察にした理由です。この考え方を使った分析がP.7〜P.8です。第3項に戻り、位置を確かめ、5、6、7と進むにつれて、自信がわいてきます。第8項はP.3の表2にはありません。P.9の下に求め方を示しました。M=12とM=13と両方で行なうことが大切です。安心が増します。STEPごとで問題に対するかかわり方が変化しています。〔STEP5〕ベルヌーイ数の発見のすぐ手前までくることができました。

参考にした本③はG・ポリア「数学における発見はいかになされるか」〈第1〉(帰納と類比)、柴垣和三雄訳、丸善、昭和34年です。P.121数学的帰納 1.帰納的様相「最後の2行にはどんな関係があるのかな？その比を調べてみよう、というアイディアに（うち当たる）P.122の黒い印の所をそのままいただきました。役に立ちました。〔STEP1〕と〔STEP2〕を作りました。

林 邦英

平方数の和の数列の一般項を求める考え方

㋐ 十進法を利用する係数分解法

平方数の1からnまでの和　$n=10$　385

$n=100$　338350

数字のならび方に着目します。　$n=1000$　333833500

33333… がかくれている ⇒ $\frac{1}{3}=0.33333\cdots$ ではないのか?

$n=100$を使って

$$\begin{array}{lr}
 & 338350 \\
100^3\times\frac{1}{3} & -\ 333333.333\cdots \\ \hline
 & 5016.666\cdots \\
100^2\times\frac{1}{2} & -\ 5000 \\ \hline
 & 16.666\cdots \\
100\times\frac{1}{6} & -\ 16.666\cdots \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

$$\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$$

㋑ 素数を利用する要素分析法

n	n^2	n^2の和		n	$n+1$	$2n+1$
1	1	1	1	1	②	③
2	4	5	5	②	③	5
3	9	14	2·7	③	2·②	7
4	16	30	2·3·5	2·②	5	3·③
5	25	55	5·11	5	⑥	11
6	36	91	7·13	⑥	7	13
7	49	140	2·2·5·7	7	2·2·②	5·③

$$\frac{1}{6}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)$$

○の数字をかけると⑥になる。

㋒ 階差を使う方法

	(0)	1	5	14	30	55
1	(1)	4	9	16	25	
2	(3)	5	7	9		
3 次式	(2)	2	2			

$$\begin{array}{llccc}
 & & 1 & 3 & 2 \\
n^3 & \frac{1}{3}\times(1,6,6) & -\frac{1}{3} & -2 & -2 \\ \hline
 & & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\
n^2 & \frac{1}{2}\times(1,2) & -\frac{1}{2} & -1 & \\ \hline
 & & \frac{1}{6} & 0 & \\
n & \frac{1}{6}\times(1) & -\frac{1}{6} & & \\ \hline
 & & 0 & &
\end{array}$$

平方数・立方数の和の公式を自然数の和の数列との比を利用して求める考え方

STEP 2

n	①	②	③	④					
自然数	1	2	3	4	5	6	7	8	
和	1	3	6	10	15	21	28	36	㋐
平方数	1	4	9	16	25	36	49	64	
和	1	5	14	30	55	91	140	204	㋑
立方数	1	8	27	64	125	216	343	512	
和	1	9	36	100	225	441	784	1296	㋒
$\frac{㋑}{㋐}$	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	3	$\frac{11}{3}$	$\frac{13}{3}$	5	$\frac{17}{3}$	
分母を3にすると	$\frac{3}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{13}{3}$	$\frac{15}{3}$	$\frac{17}{3}$	

$\frac{1}{3}\times(2n+1)$ であることがわかります。

自然数の和の公式は

$$\begin{array}{r}
1+2+3+\cdots+8+9+10 \\
10+9+8+\cdots+3+2+1 \\ \hline
11+11+11+\cdots+11+11+11
\end{array}\qquad n=10 \qquad \frac{11\times10}{2}=55$$

$$\frac{1}{2}\times n\times(n+1)$$

STEP 1

平方数の和の公式は　$\frac{1}{2}\times n\times(n+1)\times\frac{1}{3}\times(2n+1)$

$$=\frac{1}{6}n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)$$

$$=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$$

立方数は

	n	①	②	③	④	⑤
$\frac{㋒}{㋐}$		1	3	6	10	15

$$\left\{\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1)\right\}^2=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2$$

偶数乗数の場合は n^2 の和との比を使います。(P.4下)

STEP 3

比を調べてみようというアイディアを使います。　　4乗数の和の場合

n	n^4の和	n和	n^4の和/nの和	n^2の和	n^4の和/n^2の和	階差1	階差2 (2次式)
0	0	0	0	0	$(-1/5)$		
1	1	1	1	1	1	$(1\,1/5)$	$(1\,1/5)$
2	17	3	$5\,2/3$	5	$3\,2/5$	$2\,2/5$	$1\,1/5$
3	98	6	$16\,1/3$	14	7	$3\,3/5$	$1\,1/5$
4	354	10	$35\,2/5$	30	$11\,4/5$	$4\,4/5$	$1\,1/5$
5	979	15	$65\,4/15$	55	$17\,4/5$	6	$1\,1/5$
6	2275	21	$108\,1/3$	91	25	$7\,1/5$	$1\,1/5$
7	4676	28	167	140	$33\,2/5$	$8\,2/5$	$1\,1/5$
8	8772	36	$243\,2/3$	204	43	$9\,3/5$	$1\,1/5$
9	15333	45	$340\,11/15$	285	$53\,4/5$	$10\,4/5$	$1\,1/5$
10	25333	55	$460\,3/5$	385	$65\,4/5$	12	

$-1/5$　　$1\,1/5$　　$1\,1/5$

$$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\cdot\frac{1}{5}(3n^2+3n-1)$$

$\times\ 1/5$　　-1　　6　　6

$n^2(1,2)\times 3$　　-3　　-6

3

$n(1)\times 3$　　-3

0

$$=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

n^4の和/nの和 を使うと計算がめんどうになります。(3次式で補正するので)

1　$-1/15$　$16/15$　$54/15$　$36/15$

定　①　②　③次

$$\frac{1}{15}(6n^3+9n^2+n-1)$$

奇数乗数の場合は n^3 の和との比を使います。(P.4下)

5乗数の場合　　$n=10$までの和の数値を使って

$220825\div 55=4015$　　$4015\div 55=73$

$(n^2)\ \div 385=573\ 4/7$

$(n^3)\ \div 3025=73$

n^5の和/n^3の和 を調べます。

n	n^5の和	n^3の和	n^5の和/n^3の和	階差1	階差2 (2次式)
0	0	0	$(-1/3)$ ← 定数項		
1	1	1	1	$(1\,1/3)$	$(1\,1/3)$
2	33	9	$3\,2/3$	$2\,2/3$	$1\,1/3$
3	276	36	$7\,2/3$	4	$1\,1/3$
4	1300	100	13	$5\,1/3$	$1\,1/3$
5	4425	225	$19\,2/3$	$6\,2/3$	$1\,1/3$
6	12201	441	$27\,2/3$	8	$1\,1/3$
7	29008	784	37	$9\,1/3$	$1\,1/3$
8	61776	1296	$47\,2/3$	$10\,2/3$	$1\,1/3$
9	120825	2025	$59\,2/3$	12	$1\,1/3$
10	220825	3025	73	$13\,1/3$	

$$\frac{1}{4}n^2(n+1)^2\cdot\frac{1}{3}(2n^2+2n-1)$$

$\times\ 1/3$　　$-1/3$　　$1\,1/3$　　$1\,1/3$

-1　　4　　4

$n^2(1,2)\times 2$　　-2　　-4

2

$n(1)\times 2$　　-2

0

$$=\frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$$

STEP4

表2 和の形の式

M=1
$\frac{1}{2}N^2+\frac{1}{2}N$
M=2
$\frac{1}{3}N^3+\frac{1}{2}N^2+\frac{1}{6}N$
M=3
$\frac{1}{4}N^4+\frac{1}{2}N^3+\frac{1}{4}N^2$
M=4
$\frac{1}{5}N^5+\frac{1}{2}N^4+\frac{1}{3}N^3-\frac{1}{30}N$
M=5
$\frac{1}{6}N^6+\frac{1}{2}N^5+\frac{5}{12}N^4-\frac{1}{12}N^2$
M=6
$\frac{1}{7}N^7+\frac{1}{2}N^6+\frac{1}{2}N^5-\frac{1}{6}N^3+\frac{1}{42}N$
M=7
$\frac{1}{8}N^8+\frac{1}{2}N^7+\frac{7}{12}N^6-\frac{7}{24}N^4+\frac{1}{12}N^2$
M=8
$\frac{1}{9}N^9+\frac{1}{2}N^8+\frac{2}{3}N^7-\frac{7}{15}N^5+\frac{2}{9}N^3-\frac{1}{30}N$
M=9
$\frac{1}{10}N^{10}+\frac{1}{2}N^9+\frac{3}{4}N^8-\frac{7}{10}N^6+\frac{1}{2}N^4-\frac{3}{20}N^2$
M=10
$\frac{1}{11}N^{11}+\frac{1}{2}N^{10}+\frac{5}{6}N^9-N^7+N^5-\frac{1}{2}N^3+\frac{5}{66}N$

第4項の観察

$-\frac{1}{30}\quad -\frac{1}{12}\quad -\frac{1}{6}\quad -\frac{7}{24}\quad -\frac{7}{15}\quad -\frac{7}{10}\quad -1$

× (−120)

4 10 20 35 56 84 120

(1) $\boxed{4}$ $\boxed{10}$ $\boxed{20}$ $\boxed{35}$ $\boxed{56}$ $\boxed{84}$ $\boxed{120}$
(1) (3) 6 10 15 21 28 36
(1) (2) (3) 4 5 6 7 8
(1) (1) (1) (1) 1 1 1 1

階差を作り、左へのばし、向きを変えて見ると？

㋐ 十進法を利用

表 1

1からNまでのM乗数の和
(数値はポケット・コンピュータを使用)

M = 1
N = 10 55
N = 100 5050
N = 1000 500500

M = 2
N = 10 385
N = 100 338350
N = 1000 333833500

M = 3
N = 10 3025
N = 100 25502500

M = 4
N = 10 25333
N = 100 2050333330

M = 5
N = 10 220825
N = 100 $1.717083325 \times 10^{11}$
N = 1000 $1.671670833 \times 10^{17}$

M = 6
N = 10 1978405
N = 100 $1.4790714 12 \times 10^{13}$
N = 1000 $1.433576429 \times 10^{20}$

M = 7
N = 10 18080425
N = 100 $1.300583304 \times 10^{15}$
N = 1000 $1.255005833 \times 10^{23}$

M = 8
N = 10 167731333
N = 100 $1.161777731 \times 10^{17}$
N = 1000 $1.116117778 \times 10^{26}$

M = 9
N = 10 1574304985
N = 100 $1.05074993 \times 10^{19}$
N = 1000 1.0050075×10^{29}

M = 10
N = 10 14914341925
N = 100 $9.59924 1424 \times 10^{20}$
N = 1000 $9.140992424 \times 10^{31}$

積の形の式

No.
Date

M=1
$\frac{1}{2}\cdot N\cdot(N+1)$
M=2
$\frac{1}{6}\cdot N\cdot(N+1)(2N+1)$
M=3
$\frac{1}{4}\cdot N^2(N+1)^2$
M=4
$\frac{1}{30}N\cdot(N+1)(2N+1)(3N^2+3N-1)$
M=5
$\frac{1}{12}N^2(N+1)^2(2N^2+2N-1)$
M=6
$\frac{1}{42}N\cdot(N+1)(2N+1)(3N^4+6N^3-3N+1)$

規則性がありそうです。

和の形と積の形では和の公式の異なる性質を知ることができます。

N = 10 の数値の素因数分解の表

M=1 5 × 11
M=2 5 × 7 × 11
M=3 5 × 5 × 11 × 11
M=4 7 × 7 × 11 × 47
M=5 5 × 5 × 11 × 11 × 73
M=6 5 × 11 × 13 × 2767
M=7 5 × 5 × 11 × 11 × 43 × 139
M=8 7 × 11 × 17 × 97 × 1321
M=9 5 × 11 × 11 × 109 × 23873

$5 \rightarrow \frac{1}{2}N$
$11 \rightarrow (N+1)$
$7 \rightarrow \frac{1}{3}(2N+1)$
といえないか？

多くある5, 7, 11を分析することでMが奇数と偶数の場合に分類することができます。

㋑ 素数を利用

P.3下の数値を利用した数値分析（M=5～M=7）

STEP 3

No. 9

⑤ M=5の場合

N=10 は 220825

N=100 は $1.717083325 \times 10^{11}$

N=1000 は $1.671670833 \times 10^{17}$

22 08 25

17 17 08 33 25 ‥

1 67 1 67 08 33 ‥‥‥‥

これまでの結果を整理すると.

M=1 $\frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{2}N$

M=2 $\frac{1}{3}N^3 + \frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{6}N$

M=3 $\frac{1}{4}N^4 + \frac{1}{2}N^3 + \frac{1}{4}N^2$

M=4 $\frac{1}{5}N^5 + \frac{1}{2}N^4 + \frac{1}{3}N^3 - \frac{1}{30}N$

係数は M+1　係数は $\frac{1}{2}$

10

167 167 083 3‥ ‥ ‥

− 166 666 666 666 666 666. 666　1/6

500 416 ‥ ‥ ‥

− 500 000 000 000 000　1/2

416 ‥ ‥ ‥

12 12 08 33 25 ‥

− 16. 66 66 66 66 .66 .166

50 41 66 5(8) ‥

− 50 00 00 00 00

41 66 5(8) ‥　5/12

− 41 66 66 66

(8) ‥

$\frac{41\frac{2}{3}}{100} = \frac{41\times3+2}{300} = \frac{125}{300} = \frac{5}{12}$

$\frac{5}{12} = 0.41666666$

11

2 2 0 8 2 5

− 1 6 6 6 6 6 . 6 6 6

5 4 1 5 8 . 3 3 3

− 5 0 0 0 0

4 1 5 8 . 3 3 3

− 4 1 6 6 . 6 6 6

− 8 . 3 3 3

8 . 3 3 3

0

$-\frac{8\frac{1}{3}}{100} = -\frac{25}{300} = -\frac{1}{12}$

1からNまでの和は

$\frac{1}{6}N^6 + \frac{1}{2}N^5 + \frac{5}{12}N^4 - \frac{1}{12}N^2$

第3項の規則性は

$\frac{1}{6} \rightarrow \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{3} \rightarrow \frac{5}{12} \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow \frac{7}{12}$

$\frac{2}{12} \rightarrow \frac{3}{12} \rightarrow \frac{4}{12} \rightarrow \frac{5}{12} \rightarrow \frac{6}{12} \rightarrow \frac{7}{12}$

12

⑥ M=6の場合

N=10　1978405

N=100　$1.47907 1412 \times 10^{13}$

N=1000　$1.433576429 \times 10^{20}$

14 79 07 14 12 ‥ ‥

1/7　− 14 28 57 14 28 57 14

50 49 9983 ‥ ‥

1/2　− 50 00 000000 00

49 99 83 ‥ ‥

1/2　− 50 00 00 00 00

− 17 ‥ ‥

13

1 9 7 8 4 0 5

$1/7 \times 10^7$　− 1 4 2 8 5 7 1 . 4 2 8

5 4 9 8 3 3 . 5 7 2

$1/2 \times 10^6$　− 5 0 0 0 0 0

4 9 8 3 3 . 5 7 2

$1/2 \times 10^5$　− 5 0 0 0 0

− 1 6 6 . 4 2 8 (5 7 1 4)

$1/6 \times 10^3$　1 6 6 . 6 6 6 (6 6 6 6)

0 . 2 3 8 (0 9 5 2)

$1/42 = 0.0238095(2)$　− 0. 2 3 8 (0 9 5 2)

0

$1/42 \times 10$

[1/7, 1/6 があるので $1/(7\times6) = 1/42$ と仮定すると]

1からNまでの和は

$\frac{1}{7}N^7 + \frac{1}{2}N^6 + \frac{1}{2}N^5 - \frac{1}{6}N^3 + \frac{1}{42}N$

No. 14

⑦ M=7の場合

N=10　18080425

N=100　$1.300583304 \times 10^{15}$

N=1000　$1.255005833 \times 10^{23}$

1 3 00 58 33 04 ‥ ‥ ‥

1/8　− 12 50 00 00 00 00 00 00

50 58 33 04 ‥ ‥ ‥

1/2　− 50 00 00 00 00 00 00

58 33 04 ‥ ‥ ‥

7/12　− 58 33 33 33 33 33

− 29 ‥ ‥ ‥

15

1 8 0 8 0 4 2 5

$1/8 \times 10^8$　− 1 2 5 0 0 0 0 0

5 5 8 0 4 2 5

$1/2 \times 10^7$　− 5 0 0 0 0 0 0

5 8 0 4 2 5

$7/12 \times 10^6$　− 5 8 3 3 3 3 . 3 3 3

− 2 9 0 8 . 3 3 3

10000 ÷ 2908 = 3.4387895 −Ⓐ

3.4387895 × 7 = 24.071524

7 ÷ 24 = 0.2916666　[Ⓐを次々加えて整数に近い数をさがす。この場合はⒶ×7.]

$7/24 \times 10^4$ と仮定する

[1/8, 1/12 より 分母の最小公倍数は 24]

− 2 9 0 8 . 3 3 3

2 9 1 6 . 6 6 6

8 . 3 3 3　$1/12 \times 10^2$

− 8 . 3 3 3

0

16

$\frac{1}{8}N^8 + \frac{1}{2}N^7 + \frac{7}{12}N^6 - \frac{7}{24}N^4 + \frac{1}{12}N^2$

N=4の場合

$1^7 + 2^7 + 3^7 + 4^7 = 1 + 128 + 2187 + 16384$

$= 18700$

$\frac{1}{8}\cdot4^8 + \frac{1}{2}\cdot4^7 + \frac{7}{12}\cdot4^6 - \frac{7}{24}\cdot4^4 + \frac{1}{12}\cdot4^2$

$= 8192 + 8192 + 2389.\frac{1}{3} - 74.\frac{2}{3} + 1\frac{1}{3}$

$= 18700$

M=7の場合の

1からNまでの和は

$\frac{1}{8}N^8 + \frac{1}{2}N^7 + \frac{7}{12}N^6 - \frac{7}{24}N^4 + \frac{1}{12}N^2$

P.3上「第4項の観察」で得た視点で和の形の公式を分析します。

Ⓜ 乗数の和の公式の各項の係数（第3項より第8項）

三角数 S(1)-n × 倍率

第3項			第4項			第5項		
$n=0$	×	$1/12$	$n=2$	×	$1/120$	$n=4$	×	$1/252$
$\frac{2}{12}$	②	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{120}$	④	$\frac{1}{30}$	$\frac{6}{252}$	⑥	$\frac{1}{42}$
$\frac{3}{12}$	③	$\frac{1}{4}$	$\frac{10}{120}$	⑤	$\frac{1}{12}$	$\frac{21}{252}$	⑦	$\frac{1}{12}$
$\frac{4}{12}$	④	$\frac{1}{3}$	$\frac{20}{120}$	⑥	$\frac{1}{6}$	$\frac{56}{252}$	⑧	$\frac{2}{9}$
$\frac{5}{12}$	⑤	$\frac{5}{12}$	$\frac{35}{120}$	⑦	$\frac{7}{24}$	$\frac{126}{252}$	⑨	$\frac{1}{2}$
$\frac{6}{12}$	⑥	$\frac{1}{2}$	$\frac{56}{120}$	⑧	$\frac{7}{15}$	$\frac{252}{252}$	⑩	1
$\frac{7}{12}$	⑦	$\frac{7}{12}$	$\frac{84}{120}$	⑨	$\frac{7}{10}$	$\frac{462}{252}$	⑪	$\frac{11}{6}$
$\frac{8}{12}$	⑧	$\frac{2}{3}$	$\frac{120}{120}$	⑩	1	$\frac{792}{252}$	⑫	$\frac{22}{7}$
$\frac{9}{12}$	⑨	$\frac{3}{4}$	$\frac{165}{120}$	⑪	$\frac{11}{8}$	$\frac{1287}{252}$	⑬	$\frac{143}{28}$
$\frac{10}{12}$	⑩	$\frac{5}{6}$	$\frac{220}{120}$	⑫	$\frac{11}{6}$	$\frac{2002}{252}$	⑭	$\frac{143}{18}$
$\frac{11}{12}$	⑪	$\frac{11}{12}$	$\frac{286}{120}$	⑬	$\frac{143}{60}$	$\frac{3003}{252}$	⑮	$\frac{143}{12}$

STEP 4

三角数 S(1)-n × 倍率

第6項			第7項			第8項		
$n=6$	×	$1/240$	$n=8$	×	$1/132$	$n=10$	×	$691/32760$
$\frac{8}{240}$	⑧	$\frac{1}{30}$	$\frac{10}{132}$	⑩	$\frac{5}{66}$	12	⑫	$\frac{691}{2730}$
$\frac{36}{240}$	⑨	$\frac{3}{20}$	$\frac{55}{132}$	⑪	$\frac{5}{12}$	78	⑬	$\frac{691}{420}$
$\frac{120}{240}$	⑩	$\frac{1}{2}$	$\frac{220}{132}$	⑫	$\frac{5}{3}$	364	⑭	$\frac{691}{90}$
$\frac{330}{240}$	⑪	$\frac{11}{8}$	$\frac{715}{132}$	⑬	$\frac{65}{12}$	1365	⑮	$\frac{691}{24}$
$\frac{792}{240}$	⑫	$\frac{33}{10}$	$\frac{2002}{132}$	⑭	$\frac{91}{6}$	4368	⑯	$\frac{1382}{15}$
$\frac{1716}{240}$	⑬	$\frac{143}{20}$	$\frac{5005}{132}$	⑮	$\frac{455}{12}$	12376		
$\frac{3432}{240}$	⑭	$\frac{143}{10}$	$\frac{11440}{132}$	⑯	$\frac{260}{3}$	31824		
$\frac{6435}{240}$	⑮	$\frac{429}{16}$						
$\frac{11440}{240}$	⑯	$\frac{143}{3}$						
$\frac{19448}{240}$	⑰	$\frac{2431}{30}$						

STEP 4

M=11 ~ M=13 の和の公式をつけ加えました。
第8項の倍率の決定方法を下段に示しました。

M=10 $\qquad n=8 \quad 10 \times 1/132 = 5/66$

$$\frac{1}{11}N^{11} + \frac{1}{2}N^{10} + \frac{5}{6}N^{9} - N^{7} + N^{5} - \frac{1}{2}N^{3} + \frac{5}{66}N$$

M=11 $\qquad n=8 \quad 55 \times 1/132 = 5/12$

$$\frac{1}{12}N^{12} + \frac{1}{2}N^{11} + \frac{11}{12}N^{10} - \frac{11}{8}N^{8} + \frac{11}{6}N^{6} - \frac{11}{8}N^{4} + \frac{5}{12}N^{2}$$

M=12

$$\frac{1}{13}N^{13} + \frac{1}{2}N^{12} + N^{11} - \frac{11}{6}N^{9} + \frac{22}{7}N^{7} - \frac{33}{10}N^{5} + \frac{5}{3}N^{3} - \frac{691}{2730}N$$

M=13

$$\frac{1}{14}N^{14} + \frac{1}{2}N^{13} + \frac{13}{12}N^{12} - \frac{143}{60}N^{10} + \frac{143}{28}N^{8} - \frac{143}{20}N^{6} + \frac{65}{12}N^{4} - \frac{691}{420}N^{2}$$

M=12

$$\frac{1}{13} + \frac{1}{2} + 1 - \frac{11}{6} + \frac{22}{7} - \frac{33}{10} + \frac{5}{3} = \frac{3421}{2730} = 1 + \frac{691}{2730} \qquad 12x = \frac{691}{2730}$$

$$x = \frac{691}{32760}$$

M=13

$$\frac{1}{14} + \frac{1}{2} + \frac{13}{12} - \frac{143}{60} + \frac{143}{28} - \frac{143}{20} + \frac{65}{12} = \frac{1111}{420} = 1 + \frac{691}{420}$$

$$78x = \frac{691}{420} \qquad x = \frac{691}{32760}$$

M=12 M=13 の第8項は

$S(1)-10 \quad \times 691/32760$ で求めることができる。

$n=0$ を自然数の数列にしました。（P.13上）

三角数 $S(1)-n$ の表（$\frac{右}{左}$の数値）

n	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	6	10	15	21	28	36
1	4	10	20	35	56	84	120
1	5	15	35	70	126	210	330
1	6	21	56	126	252	462	792
1	7	28	84	210	462	924	1716
1	8	36	120	330	792	1716	3432
1	9	45	165	495	1287	3003	6435
1	10	55	220	715	2002	5005	11440
1	11	66	286	1001	3003	8008	19448
1	12	78	364	1365	4368	12376	31824
1	13	91	455	1820	6188	18564	50388
1	14	105	560	2380	8568	27132	77520
1	15	120	680	3060	11628	38760	116280
1	16	136	816	3876	15504	54264	170544
	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7
	+0	+1	+2	+3	+4	+5	+6

$$1 \times \frac{5}{1} \times \frac{6}{2} \times \frac{7}{3} \times \frac{8}{4} \times \frac{9}{5} \times \frac{10}{6} \times \frac{11}{7} = 330$$

$$\frac{N}{1} \times \frac{N+1}{2} \times \frac{N+2}{3} \times \frac{N+3}{4} \times \frac{N+4}{5} \times \frac{N+5}{6} \times \frac{N+6}{7}$$

M 乗数 の数列の和を求める
階差 0項数列を使って

㋒ 階差を使う

数列の0項に着目することで
分析すべき項の数を 1つ
減らすことができました。

階差を使って

① 階差 とは
M=1 の場合

0 1 3 6 10 15 21
(0) 1 2 3 4 5 6
(1) 1 1 1 1 1 1
(0) 0 0 0 0 0

M=2 の場合

0 1 5 14 30 55 91
(0) 1 4 9 16 25 36
(1) 3 5 7 9 11
(2) 2 2 2 2
(0) 0 0 0

M=3 の場合

0 1 9 36 100 225 441
(0) 1 8 27 64 125 216
(1) 7 19 37 61 91
(6) 12 18 24 30
(6) 6 6 6
(0) 0 0

一番左の数字の列を階差 0項数列という
N, N^2, N^3 の和の場合
( )の数字は N, N^2, N^3 の場合

② 階差 0項数列 の規則性

1	N
1 1	ΣN
(×1) (×2)	
1 2	N^2
1 3 2	ΣN^2
(×1) (×2) (×3)	
1 6 6	N^3
1 7 12 6	ΣN^3
(×1) (×2) (×3) (×4)	
1 14 36 24	N^4
1 15 50 60 24	ΣN^4
(×1) (×2) (×3) (×4) (×5)	
1 30 150 240 120	N^5
1 31 180 390 360 120	ΣN^5
(×1) (×2) (×3) (×4) (×5) (×6)	
1 62 540 1560 1800 720	N^6

③ 階差 0項数列 の変化の規則性は

N	0	1	0		
$2N$	0	2	0		
$3N$	0	3	0		
N^2	0	1	2	0	
N^2+N	0	2	2	0	
N^2+2N	0	3	2	0	
N^2+3N	0	4	2	0	
$2N^2$	0	2	4	0	
$2N^2+N$	0	3	4	0	
$2N^2+2N$	0	4	4	0	
N^3	0	1	6	6	0
$N+1$	1	1	0		
N^2+1	1	1	2	0	
N^3+1	1	1	6	6	0

④ 階差 0項数列 の使い方

M=2 の場合

$N^3(1, 6, 6) \times 1/3$
0 1 3 2
− 1/3 2 2
2/3 1

$N^2(1, 2) \times 1/2$
− 1/2 1
1/6

$N(1) \times 1/6$
− 1/6
0

N^2の和は $\frac{1}{3}N^3 + \frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{6}N$

右から数をとりつくす。

0 1 3 2
定数 N N^2 N^3 に対応

M=3 の場合

$N^4(1.14.36.24) \times 1/4$
0 1 7 12 6
− 1/4 7/2 9 6
3/4 7/2 3

$N^3(1.6.6) \times 1/2$
− 1/2 3 3
1/4 1/2

$N^2(1.2) \times 1/4$
− 1/4 1/2
0 0

N^3の和は $\frac{1}{4}N^4 + \frac{1}{2}N^3 + \frac{1}{4}N^2$

M=4 の場合

$N^5(1.30.150.240.120) \times 1/5$
0 1 15 50 60 24
− 1/5 6 30 48 24
4/5 9 20 12

$N^4(1.14.36.24) \times 1/2$
− 1/2 7 18 12
3/10 2 2

$N^3(1.6.6) \times 1/3$
− 1/3 2 2
− 1/30

$N(1) \times (-1/30)$
1/30
0

$\frac{1}{5}N^5 + \frac{1}{2}N^4 + \frac{1}{3}N^3 - \frac{1}{30}N$

M=5 の場合

$N^6(1.62.540.1560.1800.720) \times 1/6$
0. 1. 31. 180. 390. 360. 120
− 1/6 31/3 90 260 300 120
5/6 62/3 90 130 60

$N^5(1.30.150.240.120) \times 1/2$
− 1/2 15 75 120 60
1/3 17/3 15 10

$N^4(1.14.36.24) \times 5/12$
− 5/12 35/6 15 10
− 1/12 − 1/6

$N^2(1.2) \times (-1/12)$
− 1/12 1/6
0 0

$\frac{1}{6}N^6 + \frac{1}{2}N^5 + \frac{5}{12}N^4 - \frac{1}{12}N^2$

P.1 − P.2 の方法は比を利用することで計算を分解しています。Mが大きい時に役に立ちます。

D(1.2)−n の n=0 は 平方数の数列です。

三角数(S) と 台形数(D) の 比を調べる

S(1)−n

n-0 1
n-1 1 1
n-2 1 2 1
n-3 1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

D(1.2)−n

n-0 1 2
n-1 1 3 2
n-2 1 4 5 2
n-3 1 5 9 7 2
1 6 19 16 9 2
1 7 20 30 25 11 2
1 8 27 50 55 36 13 2

	N	1	2	3	4	5	6	
n-0	D	1	4	9	16	25	36	
	S	1	2	3	4	5	6	N
	$\frac{D}{S}$	1	2	3	4	5	6	N

$N \times N = N^2$

n-1	D	1	5	14	30	55	91	
	S	1	3	6	10	15	21	
	$\frac{D}{S}$	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	3	$\frac{11}{3}$	$\frac{13}{3}$	
		$\frac{3}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{13}{3}$	$\frac{2N+1}{3}$

$$\frac{1}{2}N(N+1) \times \frac{1}{3}(2N+1) = \frac{1}{2}\frac{1}{3}N(N+1)(2N+1)$$

n-2	D	1	6	20	50	105	196	
	S	1	4	10	20	35	56	
	$\frac{D}{S}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	
		$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{N+1}{2} \Rightarrow \frac{2N+2}{4}$

n-3を調べると理由がわかります。

注意

$$\frac{1}{2}\frac{1}{3}N(N+1)(N+2) \times \frac{1}{4}(2N+2) = \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4}N(N+1)(N+2)(2N+2)$$

平方数の和の公式は n=1 に対応します。

	N	1	2	3	4	5	6	
n-3	D	1	7	27	77	182	378	
	S	1	5	15	35	70	126	
	$\frac{D}{S}$	1	$\frac{7}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{13}{5}$	3	
		$\frac{5}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{13}{5}$	$\frac{15}{5}$	$\frac{2n+3}{5}$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4}N(N+1)(N+2)(N+3) \times \frac{1}{5}(2n+3)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4}\frac{1}{5}N(N+1)(N+2)(N+3)(2n+3)$$

n-4	D	1	8	35	112	294	672	
	S	1	6	21	56	126	252	
	$\frac{D}{S}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	
		$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{n+2}{3} \Rightarrow \frac{2n+4}{6}$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4}\frac{1}{5}N(N+1)(N+2)(N+3)(N+4) \times \frac{1}{6}(2n+4)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4}\frac{1}{5}\frac{1}{6}N(N+1)(N+2)(N+3)(N+4)(2n+4)$$

D(1.2)−n

n=0　$N^2 \rightarrow \frac{1}{2}N(\overset{2}{2}N + \overset{1\cdot n}{0})$

n=1　$\frac{1}{2}\frac{1}{3}N(N+1)(2N+1)$

n=2　$\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4}N(N+1)(N+2)(2N+2)$

n=3　$\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4}\frac{1}{5}N(N+1)(N+2)(N+3)(2N+3)$

n=4　$\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4}\frac{1}{5}\frac{1}{6}N(N+1)(N+2)(N+3)(N+4)(2N+4)$

数学における発見はいかになされるか 1

帰納と類比

柴垣和三雄訳

MATHEMATICS AND PLAUSIBLE REASONING VOLUME 1

INDUCTION AND ANALOGY IN MATHEMATICS

By G. Polya

丸善株式会社

VII 章

数学的帰納

ジャック・ベルヌイの方法は自然科学者にも重要である。C_1, C_2, C_3……なる事例を観察することによって、概念 B の性質Aと思われるものが見いだされる。非数学的帰納によって見いだされたこのような性質 A を概念 B に属させることは、A が B の諸特性に結びついていて事例の変動に無関係な場合にのみ許されることである。このことをわれわれはベルヌイの方法から学ぶのである。他の多くの点におけると同様に、数学はこの際自然科学に対し一つのモデルを提供する。——エルンスト・マッハ[1]

1. 帰納的様相

再び例から始めよう．

最初の n 個の整数の和を見いだすことは別にむずかしいことはない．公式

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

は既知としよう，それは多くの仕方で発見されかつ証明される[2]．最初の n 個の平方の和

$$1+4+9+\cdots\cdots+n^2$$

の公式を見いだすことはそれよりむずかしい．n の小さい値に対して，この和を計算することは別にむずかしくはないが，規則を解きほごすことはそんなにやさしくない．とはいうものの，この二つの和の間に何か平行性を探し出そうとして，両者を一緒に観察することは全く自然なことである．

n	$=$	1	2	3	4	5	6……
$1+2+\cdots\cdots+n$	$=$	1	3	6	10	15	21……
$1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2$	$=$	1	5	14	30	55	91……

最後の2行にはどんな関係があるのかな？　その比を調べてみよう，というアイディアに

1)　*Erkenntnis und Irrtum*（洞察と誤謬），第4版，1920年，312ページ．
2)　*How to Solve It*，107ページ（邦訳 133 ページ）を見よ．

うち当たる：

$$
\begin{array}{cccccccc}
n & = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \cdots\cdots \\
\dfrac{1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2}{1+2+\cdots\cdots+n} & = & 1 & \dfrac{5}{3} & \dfrac{7}{3} & 3 & \dfrac{11}{3} & \dfrac{13}{3}\cdots\cdots
\end{array}
$$

規則が明白に出ている，上の比を

$$\frac{3}{3} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{7}{3} \quad \frac{9}{3} \quad \frac{11}{3} \quad \frac{13}{3}$$

のように書いてみると，それに気づかないことはほとんど不可能だ．

$$\frac{1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2}{1+2+\cdots\cdots+n}=\frac{2n+1}{3}$$

なる推測をしてみようという気持をほとんど押えることができない．既知と仮定した左辺の分母の値を使うと，上の推測はつぎの形に述べかえられることになる：

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

これは真かな？　というのは，一般的に真かな？　それを暗示した特別な $n=1, 2, 3, 4, 5, 6$ の場合には，公式は確かに真だ．ではつぎの $n=7$ の場合にも真だろうか？推測は

$$1+4+9+16+25+36+49=\frac{7\cdot 8\cdot 15}{6}$$

を予言することになるが，事実この両辺はどちらも 140 に等しい．

もちろんつぎの $n=8$ の場合に進んでいって，それをテストすることもできよう，がその誘いはあまり強くはない．われわれは公式がつぎの場合にも確かめられるだろうと，とにかく信じたい気持になっている．その確証はわれわれの信頼にごくわずかしかつけ加えないだろう——計算を実行することはほとんど価値がないくらいに思える．どうしたら推測をもっと能率的にテストできるかな？

もし推測がほんとに真ならそれは事例の変動に無関係であるはずだ，一つの事例から他の事例に移行するときも成立つはずだ．おそらく，

$$1+4+\cdots\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

だろう．だが，もしこの式が一般的に真なら，それは**つぎの場合にも成立つはずだ**；

$$1+4+\cdots\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

となるはずだ．ここに推測を能率的にチェックする機会がある：下の式から上の式を引くことにより

$$(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

が得られるのだが，推測から生じたこの結果は真なのかな？

簡単な計算で右辺を書き直すと

$$
\begin{aligned}
&\frac{n+1}{6}[(n+2)(2n+3)-n(2n+1)] \\
&=\frac{n+1}{6}[2n^2+3n+4n+6-2n^2-n] \\
&=\frac{n+1}{6}[6n+6] \\
&=(n+1)^2
\end{aligned}
$$

となる．検討した結果は争う余地のないくらい真だ，推測は厳しいテストを通過した．

2. 証明的様相

どんな結果でもその確証は推測の信頼性を増すものである．しかしいましがた検査された結果の確証はより以上のことをなすことができる：それは**推測を証明する**ことができる．われわれは，ただ観点を少し変更し注意を少し転換しさえすればよい．

たぶん

$$1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

は真だろう．**争う余地のない程**

$$(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

は真だ．**したがって**（上の二つの式を加えて得られる）

$$1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

は真である．この式は，もし推測がある整数 n に対し真であるなら，つぎの整数 $n+1$ に対しても必然的に真であることを意味する．

だが，われわれは推測が $n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ のとき真であることを知っている．7のとき真であるから，それはつぎの8のときも真でなければならない；8のとき真であるから，それは9のときも真でなければならない；9のとき真であるから 10 のときも真，したがって 11 のときも真，というふうに進んでゆける．推測はすべての整数に対して真だ；われわれはそれを完全な一般性において証明することに成功したのである．