武田利一様　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　2020.1.28

M乗数の数列の和の公式を求める場合で $1^M$ から $10^M$ までの和の数値の素因数分解の表から何が読みとれるのかについて考え直しました。数値の有効活用は大切な視点だからです。

M=1, M=2, M=3 の数列の和の公式はすでにわかっているものとして考えます。素因数分解の表はプログラムを作り計算機で求めました。

$n=10$ の数値の素因数分解の表

| | | |
|---|---|---|
| M=1 | $5\times11$ | $\frac{1}{2}n(n+1)$ |
| M=2 | $5\times7\times11$ | $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ |
| M=3 | $5\times5\times11\times11$ | $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ |
| M=4 | $7\times7\times11\times47$ | |
| M=5 | $5\times5\times11\times11\times73$ | |
| M=6 | $5\times11\times13\times2767$ | |
| M=7 | $5\times5\times11\times11\times43\times139$ | |
| M=8 | $7\times11\times17\times97\times1321$ | |
| M=9 | $5\times11\times11\times109\times23873$ | |

M=9までなのは私の計算機の有効桁数が10桁だからです。

何がわかるのか？ 5，7，11 が多い。ここから始めます。

M=1～M=3までの和の公式と対応させてみます。

M=1　　5 × 11　　$\frac{1}{2}n(n+1)$

M=2　　5 × 7 × 11　　$\frac{1}{2}n\,\frac{1}{3}(2n+1)(n+1)$

M=3　　$5^2 \times 11^2$　　$\left(\frac{1}{2}\right)^2 n^2(n+1)^2$

$5 \to 10 \div 2 \to \frac{1}{2}n$

$11 \to 10+1 \to n+1$

$7 \to 21 \div 3 \to \frac{1}{3}(2n+1)$

と考えることができます。

11の数を調べます。　1つ　M=1．M=2　M=4　M=6　M=8

2つ　M=3　M=5　M=7　M=9

2つのグループに分けることができます。　4，6，8 という偶数の場合は1つ。5，7，9，という奇数の場合は 2つです。

7は M=2，M=4，M=8 という偶数の場合にあります。

このことから，Mが偶数の時は M=2の要素を Mが奇数の時には M=3の要素があると考えることができます。

M=4から M=6について考えてみます。

$M=4$　　　　$7 \times \underset{\downarrow}{7} \times \underset{\downarrow}{11} \times 47$

$\frac{1}{3}(2n+1)$　$(n+1)$

5がかくれています。$\frac{1}{2}n$ の部分です。

$n=10$ で 1になるので $\frac{1}{10}n$ を予想できます。　$\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$

残りは 7と47です。　$7 \times 47 = 329$

$\frac{1}{10}n\ (n+1)\ \frac{1}{3}(2n+1)$ ［329の意味する式］

式の次数を調べます。

$\frac{1}{30}n\ (n+1)(2n+1)$　ここまでで 3次式です。

①　②　③

$M=1 \rightarrow$ 2次式　$M=2 \rightarrow$ 3次式　$M=3 \rightarrow$ 4次式　なので

$M=4$は 5次式になります。［329の式］は2次式です。

$n^4$の和/$n^2$の和 の $n=10$ の数値は $65\frac{4}{5}$ で $329 \div 5$ に対応しています。

$M=5$ の場合は　$5^2$と$11^2$ はそろっています。73 のとりあつかい方です。$M=5$ なので 6次式で $5^2$と$11^2$の部分は 4次式です。

73の部分を 2次式にするには、$\times 2, \times 3, \times 4 \cdots$ を考える必要があります。$73 \times 2 = 146$　$73 \times 3 = 219$　$73 \times 4 = 292 \cdots\cdot$

$M=6$の場合は 7がかくれています。

$\frac{1}{2}n\ (n+1)\ \frac{1}{3}(2n+1)\frac{1}{7}$　　$13 \times 2767 = 35971$（4次式）

①　②　③　（残りは $6+1-3=4$）

林 和英