2020. 12. 25

武田利一様

今日が今年さいごの休日なので 1年をふり返っています。

① 1に近い平方根を「数あそび」のように求める方法を改良しました。$\sqrt{1.3}$ の場合を示します。

$1.3 = \frac{13}{10}$ 元の分数　　$13 - 10 = 3$

$(13 + 10) \times 2 = 46$　$\begin{matrix} +3 \\ -3 \end{matrix}$　$\frac{49}{43}$ 1次分数

$\frac{49}{43} + \frac{3^3}{10 \times 2 \times 49 \times 43} = \frac{48047}{42140}$ 2次分数

補正項の作り方

分子は元の分数の(分子ー分母)の3乗です。

分母は元の分数の分母×2×1次分数の分子×1次分数の分母です。

② 数列の一般項を求める考え方について学習しました。

M乗数の和の公式の求め方について、

㋐ M=1(自然数の数列の和)の場合は等差数列という性質を利用して求めます。

㋑ M=2(平方数), M=3(立方数)の場合は自然数の数列との比を調べることで簡単に求めることができることに気がつきました。

㋒ M=4以上は異なる考え方や方法を組み合わせることが大切だと思いました。

㋓ M=10以上は和の公式の構造の分析でした。

4乗数，5乗数　の和の公式を求める場合，平方数，立方数の和の数列との比を調べることで，階差だけを使う場合よりも，計算が分散され，簡単になりました。7乗数の場合は 4乗数 × 4乗数に分解して求めました。対応させる数列をみつけることで 数列の分析が簡単になります。構造の分析です。M乗数の和の公式（和の形）の係数はパスカルの三角形によって作られる数列（三角数 $S_{(1)-n}$）と対応していました。10乗数までの和の公式を分析することで，11乗数以上の公式をもっと簡単に求めることができました。㋐㋑㋒㋓の考え方は全体として1つのものでどれもが大切だと思いました。

平方数の和の数列の一般項を求める考え方について

㋐ 十進法を利用する係数分解法，㋑ 素数を利用する要素分析法

㋒ 階差を使う方法　の他に $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$ の式を変形する方法と「俵積み法」があることを北海道の方に教えていただきました。数表，数値分析以外の考え方も大切だと思いました。ありがとうございます。

③　レポート 2008.6.3「循環小数について」，レポート 2008.6.6「1÷487について」，レポート 2008.6.18「1÷487（つづき）」，レポート 2018.6.2「九九の表」

を読み直しています。

41進法での $1/N$ の l の表を分析をすることで M進法においての M−1 と M+1 の数値のもつ意味を確かめることができます。

十進法では、$10-1=9=3\times3$ が問題になります。

定数倍の例外を分類する上で役に立ちました。

レポート「九九の表」のP.4に「進法を変化させた時の $1\div N$ の循環節の長さ（Nは素数）」の表があります。

和田秀男先生の「数の世界 −整数論への道」の「奇素数とその最小素数原始根の表」と対応させてみました。循環節の長さが始めて N−1 桁になる時の進法に対応していることがわかりました。そこで「原始根」で Google検索しました。

「原始根の数のかぞえかた − tsujimotterのノートブック」が参考になりました。ありがとうございます。

P=11の場合　2、8、7、6

P=13の場合　2、6、11、7

P=17の場合　3、10、5、11、14、7、12、6

循環節の長さが N−1 桁になる時の進法に対応していました。

林 和英

平方数・立方数の和の公式を自然数の和の数列との比を利用して求める考え方

	n	①	②	③	④					
自然数		1	2	3	4	5	6	7	8	
和		1	3	6	10	15	21	28	36	㋐
平方数		1	4	9	16	25	36	49	64	
和		1	5	14	30	55	91	140	204	㋑
立方数		1	8	27	64	125	216	343	512	
和		1	9	36	100	225	441	784	1296	㋒
㋑/㋐		1	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	3	$\frac{11}{3}$	$\frac{13}{3}$	5	$\frac{17}{3}$	
分母を3にすると		$\frac{3}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{13}{3}$	$\frac{15}{3}$	$\frac{17}{3}$	

$\frac{1}{3}\times(2n+1)$ であることがわかります。

自然数の和の公式は

$$1+2+3+\cdots+8+9+10 \qquad n=10$$
$$10+9+8+\cdots+3+2+1$$
$$11+11+11+\cdots+11+11+11 \qquad \frac{11\times10}{2}=55$$

$$\frac{1}{2}\times n\times(n+1)$$

平方数の和の公式は $\frac{1}{2}\times n\times(n+1)\times\frac{1}{3}\times(2n+1)$

$$=\frac{1}{6}n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)$$

$$=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$$

立方数は

	n	①	②	③	④	⑤
㋒/㋐		1	3	6	10	15

$$\left\{\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1)\right\}^2=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2$$

平方数の和の数列の一般項を求める考え方

㋐ 十進法を利用する係数分解法

平方数の 1からnまでの和

数字のならび方に着目します。

$n=10$	385
$n=100$	338350
$n=1000$	333833500

33333…がかくれている ⇒ $\frac{1}{3}=0.33333\cdots$ ではないのか？

$n=100$を使って

$$
\begin{array}{lr}
 & 338350 \\
100^3\times\frac{1}{3} & -\ 333333.333\cdots \\ \hline
 & 5016.666\cdots \\
100^2\times\frac{1}{2} & -\ 5000 \\ \hline
 & 16.666\cdots \\
100\times\frac{1}{6} & -\ 16.666\cdots \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

$$\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$$

㋑ 素数を利用する要素分析法

n	n^2	n^2の和		n	$n+1$	$2n+1$
1	1	1	1	1	2	3
2	4	5	5	2	3	5
3	9	14	2·7	3	2·2	7
4	16	30	2·3·5	2·2	5	3·3
5	25	55	5·11	5	6	11
6	36	91	7·13	6	7	13
7	49	140	2·2·5·7	7	2·2·2	5·3

$$\frac{1}{6}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)$$

○の数字をかけると6になる。

㋒ 階差を使う方法

	(0)	1	5	14	30	55
$\boxed{1}$	(1)	4	9	16	25	
$\boxed{2}$	(3)	5	7	9		
$\boxed{3}$次式	(2)	2	2			

$$
\begin{array}{llrrr}
 & & 1 & 3 & 2 \\
n^3 & \frac{1}{3}\times(1,6,6) & -\frac{1}{3} & -2 & -2 \\ \hline
 & & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\
n^2 & \frac{1}{2}\times(1,2) & -\frac{1}{2} & -1 & \\ \hline
 & & \frac{1}{6} & 0 & \\
n & \frac{1}{6}\times(1) & -\frac{1}{6} & & \\ \hline
 & & 0 & &
\end{array}
$$