2020.11.15

武田 利一 様

10乗数までの和の公式の表（表2）と 三角数 S(1)-n の表を組み合わせて分析しました。始まりは第4項の係数の観察でした。係数の分母を 120に統一し分子を調べました。

		4	10	20	35	56	84	120 ← 第4項
			6	10	15	21	28	36
(2)	(3)	4	5	6	7	8		（← 第3項）
			1	1	1	1		

階差を作ることで 三角数 S(1)-n の表の一部であることがわかりました。

M乗数の和の公式の各項の係数は 三角数 S(1)-n の数値×倍率によって決定されます。11乗数の和の公式は 10乗数の和の公式の分析で求めることができます。$5/66$ を使い第7項が $n=8 \times 1/132$ であることがわかるからです。12乗数と13乗数は、$n=1$ の時の和の値が 1 であることを利用して、第8項、$n=10$ の倍率を決定する必要がありました。$\times {}^{691}/_{32760}$ です。

林 邦英

表 2

M=1

$$\frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{2}N$$

M=2

$$\frac{1}{3}N^3 + \frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{6}N$$

M=3

$$\frac{1}{4}N^4 + \frac{1}{2}N^3 + \frac{1}{4}N^2$$

M=4

$$\frac{1}{5}N^5 + \frac{1}{2}N^4 + \frac{1}{3}N^3 - \frac{1}{30}N$$

M=5

$$\frac{1}{6}N^6 + \frac{1}{2}N^5 + \frac{5}{12}N^4 - \frac{1}{12}N^2$$

M=6

$$\frac{1}{7}N^7 + \frac{1}{2}N^6 + \frac{1}{2}N^5 - \frac{1}{6}N^3 + \frac{1}{42}N$$

M=7

$$\frac{1}{8}N^8 + \frac{1}{2}N^7 + \frac{7}{12}N^6 - \frac{7}{24}N^4 + \frac{1}{12}N^2$$

M=8

$$\frac{1}{9}N^9 + \frac{1}{2}N^8 + \frac{2}{3}N^7 - \frac{7}{15}N^5 + \frac{2}{9}N^3 - \frac{1}{30}N$$

M=9

$$\frac{1}{10}N^{10} + \frac{1}{2}N^9 + \frac{3}{4}N^8 - \frac{7}{10}N^6 + \frac{1}{2}N^4 - \frac{3}{20}N^2$$

M=10

$$\frac{1}{11}N^{11} + \frac{1}{2}N^{10} + \frac{5}{6}N^9 - N^7 + N^5 - \frac{1}{2}N^3 + \frac{5}{66}N$$

三角数 $S_{(1)}-n$ の表

n	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	6	10	15	21	28	36
1	4	10	20	35	56	84	120
1	5	15	35	70	126	210	330
1	6	21	56	126	252	462	792
1	7	28	84	210	462	924	1716
1	8	36	120	330	792	1716	3432
1	9	45	165	495	1287	3003	6435
1	10	55	220	715	2002	5005	11440
1	11	66	286	1001	3003	8008	19448
1	12	78	364	1365	4368	12376	31824
1	13	91	455	1820	6188	18564	50388
1	14	105	560	2380	8568	27132	77520
1	15	120	680	3060	11628	38760	116280
1	16	136	816	3876	15504	54264	170544

Ⓜ 乗数の和の公式の各項の係数（第3項より第8項）

三角数 $S_{(1)-n}$ × 倍率

第3項			第4項			第5項		
$n=0$	×	$1/12$	$n=2$	×	$1/120$	$n=4$	×	$1/252$
$\frac{2}{12}$	②	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{120}$	④	$\frac{1}{30}$	$\frac{6}{252}$	⑥	$\frac{1}{42}$
$\frac{3}{12}$	③	$\frac{1}{4}$	$\frac{10}{120}$	⑤	$\frac{1}{12}$	$\frac{21}{252}$	⑦	$\frac{1}{12}$
$\frac{4}{12}$	④	$\frac{1}{3}$	$\frac{20}{120}$	⑥	$\frac{1}{6}$	$\frac{56}{252}$	⑧	$\frac{2}{9}$
$\frac{5}{12}$	⑤	$\frac{5}{12}$	$\frac{35}{120}$	⑦	$\frac{7}{24}$	$\frac{126}{252}$	⑨	$\frac{1}{2}$
$\frac{6}{12}$	⑥	$\frac{1}{2}$	$\frac{56}{120}$	⑧	$\frac{7}{15}$	$\frac{252}{252}$	⑩	1
$\frac{7}{12}$	⑦	$\frac{7}{12}$	$\frac{84}{120}$	⑨	$\frac{7}{10}$	$\frac{462}{252}$	⑪	$\frac{11}{6}$
$\frac{8}{12}$	⑧	$\frac{2}{3}$	$\frac{120}{120}$	⑩	1	$\frac{792}{252}$	⑫	$\frac{22}{7}$
$\frac{9}{12}$	⑨	$\frac{3}{4}$	$\frac{165}{120}$	⑪	$\frac{11}{8}$	$\frac{1287}{252}$	⑬	$\frac{143}{28}$
$\frac{10}{12}$	⑩	$\frac{5}{6}$	$\frac{220}{120}$	⑫	$\frac{11}{6}$	$\frac{2002}{252}$	⑭	$\frac{143}{18}$
$\frac{11}{12}$	⑪	$\frac{11}{12}$	$\frac{286}{120}$	⑬	$\frac{143}{60}$	$\frac{3003}{252}$	⑮	$\frac{143}{12}$

三角数 $S(1)-n$ × 倍率

第 6 項

$n=6 \times 1/240$

$\frac{8}{240}$	8	$\frac{1}{30}$
$\frac{36}{240}$	9	$\frac{3}{20}$
$\frac{120}{240}$	10	$\frac{1}{2}$
$\frac{330}{240}$	11	$\frac{11}{8}$
$\frac{792}{240}$	12	$\frac{33}{10}$
$\frac{1716}{240}$	13	$\frac{143}{20}$
$\frac{3432}{240}$	14	$\frac{143}{10}$
$\frac{6435}{240}$	15	$\frac{429}{16}$
$\frac{11440}{240}$	16	$\frac{143}{3}$
$\frac{19448}{240}$	17	$\frac{2431}{30}$

第 7 項

$n=8 \times 1/132$

$\frac{10}{132}$	10	$\frac{5}{66}$
$\frac{55}{132}$	11	$\frac{5}{12}$
$\frac{220}{132}$	12	$\frac{5}{3}$
$\frac{715}{132}$	13	$\frac{65}{12}$
$\frac{2002}{132}$	14	$\frac{91}{6}$
$\frac{5005}{132}$	15	$\frac{455}{12}$
$\frac{11440}{132}$	16	$\frac{260}{3}$

第 8 項

$n=10 \times 691/32760$

12	12	$\frac{691}{2730}$
78	13	$\frac{691}{420}$
364	14	$\frac{691}{90}$
1365	15	$\frac{691}{24}$
4368	16	$\frac{1382}{15}$
12376		
31824		

$M=10$ $\quad n=8 \quad 10 \times 1/132 = 5/66$

$$\frac{1}{11}N^{11} + \frac{1}{2}N^{10} + \frac{5}{6}N^{9} - N^{7} + N^{5} - \frac{1}{2}N^{3} + \frac{5}{66}N$$

$M=11$ $\quad n=8 \quad 55 \times 1/132 = 5/12$

$$\frac{1}{12}N^{12} + \frac{1}{2}N^{11} + \frac{11}{12}N^{10} - \frac{11}{8}N^{8} + \frac{11}{6}N^{6} - \frac{11}{8}N^{4} + \frac{5}{12}N^{2}$$

$M=12$

$$\frac{1}{13}N^{13} + \frac{1}{2}N^{12} + N^{11} - \frac{11}{6}N^{9} + \frac{22}{7}N^{7} - \frac{33}{10}N^{5} + \frac{5}{3}N^{3} - \frac{691}{2730}N$$

$M=13$

$$\frac{1}{14}N^{14} + \frac{1}{2}N^{13} + \frac{13}{12}N^{12} - \frac{143}{60}N^{10} + \frac{143}{28}N^{8} - \frac{143}{20}N^{6} + \frac{65}{12}N^{4} - \frac{691}{420}N^{2}$$

$M=12$

$$\frac{1}{13} + \frac{1}{12} + 1 - \frac{11}{6} + \frac{22}{7} - \frac{33}{10} + \frac{5}{3} = \frac{3421}{2730} = 1 + \frac{691}{2730} \qquad 12x = \frac{691}{2730}$$

$$x = \frac{691}{32760}$$

$M=13$

$$\frac{1}{14} + \frac{1}{2} + \frac{13}{12} - \frac{143}{60} + \frac{143}{28} - \frac{143}{20} + \frac{65}{12} = \frac{1111}{420} = 1 + \frac{691}{420}$$

$$78x = \frac{691}{420} \qquad x = \frac{691}{32760}$$

$M=12$ $M=13$ の第8項は

$S(1)-10 \times {}^{691}/_{32760}$ で求めることができる。