

2020.11.12

武田 利一様

秋も深まってきました。郵便局では年賀状の販売も始まりました。

夕暮れが早くなり、オートバイの運転には気をつかいます。これから

寒い日が続きます。お体に気をつけて下さい。

十進法を利用した係数分解法で M 乗数の和の公式を求める

レポートを同封します。私の数表は、有効数字が10桁なので、

$M=5$ 以上は工夫をする必要がありました。P.4の補足説明は今日

つけ加えました。

表2の第4項は

$$\begin{array}{ccccccc} -\frac{1}{30} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & -\frac{7}{24} & -\frac{7}{15} & -\frac{7}{10} & -1 \\ \frac{4}{120} & \frac{10}{120} & \frac{20}{120} & \frac{35}{120} & \frac{56}{120} & \frac{84}{120} & \frac{120}{120} \end{array}$$

三角数 $S(n)-2$

(1), 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165
220, 286, 364, 455,

であると予想することが出来ます。第3項は $S(n)-0$ です。

表2をたてに見ると、新たな発見が生まれます。数表を作り、

数値分析をする楽しさはここにあります。

林 邦英

1 から N までの M 乗数の和
(数値はポケット・コンピュータを使用)

$M = 1$

$N = 10$ 55

$N = 100$ 5050

$N = 1000$ 500500

$M = 2$

$N = 10$ 385

$N = 100$ 338350

$N = 1000$ 333833500

$M = 3$

$N = 10$ 3025

$N = 100$ 25502500

$M = 4$

$N = 10$ 25333

$N = 100$ 2050333330

$M = 5$

$N = 10$ 220825

$N = 100$ $1.717083325 \times 10^{11}$

$N = 1000$ $1.671670833 \times 10^{17}$

表 1

$M = 6$

$N = 10$ 1978405

$N = 100$ $1.479071412 \times 10^{13}$

$N = 1000$ $1.433576429 \times 10^{20}$

$M = 7$

$N = 10$ 18080425

$N = 100$ $1.300583304 \times 10^{15}$

$N = 1000$ $1.255005833 \times 10^{23}$

$M = 8$

$N = 10$ 167731333

$N = 100$ $1.161777731 \times 10^{17}$

$N = 1000$ $1.116117778 \times 10^{26}$

$M = 9$

$N = 10$ 1574304985

$N = 100$ $1.05074993 \times 10^{19}$

$N = 1000$ 1.0050075×10^{29}

$M = 10$

$N = 10$ 14914341925

$N = 100$ $9.599241424 \times 10^{20}$

$N = 1000$ $9.140992424 \times 10^{31}$

1
M乗数の数列の和を求める

1 から N までの和
(N=10, N=100)
の数值を使って

2
数值の作り方

$\sum_{k=1}^N k^M$ を求める BASIC プログラム
(CASIO FX-890P)

```

5 CLEAR
10 INPUT "N=" ; N
20 INPUT "M=" ; M
30 R = 0
40 FOR I = 1 TO N STEP 1
50 J = I ^ M
60 R = R + J
70 NEXT I
80 PRINT R
90 END

```

3
数值を使って

① M=1 の場合

N=10 は 55

N=100 は 5050

N=1000 は 500500

$\frac{1}{2} \times 10$

$\frac{1}{2} \times 100$

$\frac{1}{2} \times 1000$

50 + 5

5000 + 50

500000 + 500

$\frac{1}{2} \times 100$

$\frac{1}{2} \times 10000$

$\frac{1}{2} \times 1000000$

$\frac{1}{2} \times 10$

$\frac{1}{2} \times 100$

$\frac{1}{2} \times 1000$

N=10

N=100

N=1000

$\frac{1}{2} N^2$

$\frac{1}{2} N^2$

$\frac{1}{2} N^2$

$\frac{1}{2} N$

$\frac{1}{2} N$

$\frac{1}{2} N$

1 から N までの和は

$\frac{1}{2} N^2 + \frac{1}{2} N$

4
[補足説明]

① P.15 M=7 $-\frac{7}{24} N^7$ の係数について

$10000 \div 2908 = 3.4387895$ を使う

$10000 \div 2908 = -3 \div 7 = -2 \div 24$

$-3 \div 7 = -1 \div 3 = -1 \div 24 = 2.4666\dots$

$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{2}{24} \quad \frac{9}{31}$

$2 \div 7 \times 10000 = 2857.142$

2908.233 より
小

$7 \div 24 \times 10000 = 2916.666$

大

$9 \div 31 \times 10000 = 2903.225$

小

等4項以降は係数が -1 と < 1 返すという予想
を使い $\frac{7}{24}$ に決定します。

② P.18 M=8 $-\frac{7}{15} N^8$ の係数の決定にも

使うことができません。

$6 \div 13 \times 10^5 = 46153.846$

46444.777 より
小

$7 \div 15 \times 10^5 = 46666.666$

大

$13 \div 28 \times 10^5 = 46428.571$

小

No.

6

② M=2の場合

N=10 は 385

N=100 は 338350

N=1000 は 333833500

1000=10³ 正から3桁ずつ区切りをつける。333 833 500 $\frac{333}{1000}$ に近い分数を求めよ $\rightarrow \frac{1}{3}$

$$\begin{array}{r} 333 \quad 833 \quad 500 \\ - 333 \quad 333 \quad 333 \end{array} \quad \frac{1}{3} \times 1000^3$$
500 166.666 $\frac{500}{1000}$ を約分すると $\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{r} 500 \quad 166. \quad 666 \\ - 500 \quad 000 \end{array} \quad \frac{1}{2} \times 1000^2$$

166.666

$$\frac{166\frac{2}{3}}{1000} = \frac{166 \times 3 + 2}{3000} = \frac{498 + 2}{3000} = \frac{1}{6}$$

$$\begin{array}{r} 166.666 \\ - 166.666 \\ \hline 0 \end{array} \quad \frac{1}{6} \times 1000$$

N=1000の場合

$$\frac{1}{3} \times 1000^3 + \frac{1}{2} \times 1000^2 + \frac{1}{6} \times 1000$$

1からNまでの和は

$$\frac{1}{3} N^3 + \frac{1}{2} N^2 + \frac{1}{6} N$$

7

8

③ M=3の場合

N=10 は 3025

N=100 は 25502500

100=10² 正から2桁ずつ区切りをつける。25 50 25 00

- 25 00 00 00

50 25 00

- 50 00 00

25 00

- 25 00

0

$$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} \times 100^4$$

$$\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \times 100^3$$

$$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} \times 100^2$$

1からNまでの和は

$$\frac{1}{4} N^4 + \frac{1}{2} N^3 + \frac{1}{4} N^2$$

④ M=4の場合

N=10 は 25333

N=100 は 2050333330

100=10² 正から2桁ずつ区切りをつける。20 50 33 33 30

- 20 00 00 00 00

50 33 33 30

- 50 00 00 00

33 33 30

- 33 33 33 333

- 3 333

3 333

0

$$\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{5} \times 100^5$$

$$\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \times 100^4$$

$$\frac{33\frac{1}{3}}{100} = \frac{99+1}{300} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} \times 100^3$$

$$\frac{3\frac{1}{3}}{100} = \frac{1}{30}$$

$$\frac{1}{30} \times 100$$

1からNまでの和は

$$\frac{1}{5} N^5 + \frac{1}{2} N^4 + \frac{1}{3} N^3 + \frac{1}{30} N$$

No.

9

⑤ M=5の場合

$$\begin{aligned} N=10 & \text{ は } 220825 \\ N=100 & \text{ は } 1.717083325 \times 10^{11} \\ N=1000 & \text{ は } 1.671670833 \times 10^{19} \\ & \begin{array}{r} \underline{220825} \\ 1717083325 \\ \hline 1671670833 \end{array} \end{aligned}$$

これまでの結果を整理すると

$$\begin{aligned} M=1 & \quad \frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{2}N \\ M=2 & \quad \frac{1}{3}N^3 + \frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{6}N \\ M=3 & \quad \frac{1}{4}N^4 + \frac{1}{2}N^3 + \frac{1}{4}N^2 \\ M=4 & \quad \frac{1}{5}N^5 + \frac{1}{2}N^4 + \frac{1}{3}N^3 - \frac{1}{30}N \end{aligned}$$

↑ ↑
係数は M+1 係数は $\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{r} 1671670833 \\ - 166666666666.666 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 50416 \\ - 50000000000000 \\ \hline 416 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1217083325 \\ - 166666666666.666 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5041665 \\ - 500000000000 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 41665 \\ - 41666666 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \frac{41\frac{2}{3}}{300} \\ & = \frac{125}{300} = \frac{5}{12} \\ & \frac{5}{12} = 0.41666666 \end{aligned}$$

11

$$\begin{array}{r} \underline{220825} \\ - 166666.666 \\ \hline 54158.333 \\ - 50000 \\ \hline 4158.333 \\ - 4166.666 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{8\frac{1}{3}}{100} &= -\frac{25}{300} \\ &= -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

1からNまでの和は

$$\frac{1}{6}N^6 + \frac{1}{2}N^5 + \frac{5}{12}N^4 - \frac{1}{12}N^2$$

各項の規則性は

$$\begin{array}{cccccc} \frac{1}{6} & \rightarrow & \frac{1}{4} & \rightarrow & \frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{5}{12} & \rightarrow & \frac{1}{2} & \rightarrow & \frac{7}{12} \\ \frac{2}{12} & \rightarrow & \frac{3}{12} & \rightarrow & \frac{4}{12} & \rightarrow & \frac{5}{12} & \rightarrow & \frac{6}{12} & \rightarrow & \frac{7}{12} \end{array}$$

12

⑥ M=6の場合

$$\begin{aligned} N=10 & \quad 1978405 \\ N=100 & \quad 1.479071412 \times 10^{13} \\ N=1000 & \quad 1.433576429 \times 10^{20} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 1479071412 \\ - 14285714285714 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 50499983 \\ - 50000000000000 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 499983 \\ - 500000000000 \\ \hline \end{array}$$

$$- 17$$

13

No.

14

$$\begin{aligned} & \frac{1}{7} \times 10^7 = \frac{1928405}{1428571.428} \\ & \frac{1}{2} \times 10^6 = \frac{549833.572}{500000} \\ & \frac{1}{2} \times 10^5 = \frac{49833.572}{50000} \\ & \frac{1}{6} \times 10^3 = \frac{166.666(6.666)}{0.238(0.952)} \\ & \frac{1}{42} = 0.0238095(2) = \frac{0.238(0.952)}{0} \\ & \frac{1}{42} \times 10 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} \text{ 和は } \frac{1}{42} \\ \frac{1}{7} \times 6 = \frac{1}{42} \end{array} \right\} \\ & \frac{1}{7} N^7 + \frac{1}{2} N^6 + \frac{1}{2} N^5 - \frac{1}{6} N^3 + \frac{1}{42} N \end{aligned}$$

⑦ M=7の場合

$$\begin{aligned} N=10 & \quad 18080425 \\ N=100 & \quad 1.300583304 \times 10^{15} \\ N=1000 & \quad 1.255005833 \times 10^{23} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} & \quad \frac{1300583304 \dots}{125000000000000} \\ \frac{1}{2} & \quad \frac{50583304 \dots}{50000000000000} \\ \frac{7}{12} & \quad \frac{583304 \dots}{5833333333} \\ & \quad - 29 \dots \end{aligned}$$

15

16

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \times 10^8 & \quad 18080425 \\ & \quad - 12500000 \\ \frac{1}{2} \times 10^7 & \quad 5580425 \\ & \quad - 5000000 \\ \frac{7}{12} \times 10^6 & \quad 580425 \\ & \quad - 583333.333 \\ & \quad - 2908.333 \\ 10000 \div 2908 & = 3.4387895 \text{ (A)} \\ 3.4387895 \times 7 & = 24.071524 \\ 7 + 24 & = 0.29166666 \text{ (A) } \left\{ \begin{array}{l} \text{① ②の和は } \frac{1}{24} \\ \text{③の和は } \frac{1}{24} \end{array} \right. \\ \frac{7}{24} \times 10^4 & \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{12} \text{ と } \frac{1}{24} \\ \text{分母を最小公倍数} \\ \text{に } 24 \end{array} \right. \\ & \quad - 2908.333 \\ & \quad 2916.666 \\ & \quad 8.333 \\ & \quad - 8.333 \\ & \quad 0 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{8} N^8 + \frac{1}{2} N^7 + \frac{7}{12} N^6 - \frac{7}{24} N^4 + \frac{1}{12} N^2$$

N=4の場合

$$1^7 + 2^7 + 3^7 + 4^7 = 1 + 128 + 2187 + 16384 = 18700$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8} \cdot 4^8 + \frac{1}{2} \cdot 4^7 + \frac{7}{12} \cdot 4^6 - \frac{7}{24} \cdot 4^4 + \frac{1}{12} \cdot 4^2 \\ & = 8192 + 8192 + 2389 \frac{1}{3} - 74 \frac{1}{3} + 1 \frac{1}{3} \\ & = 18700 \end{aligned}$$

M=7の場合

1からNまでの和は

$$\frac{1}{8} N^8 + \frac{1}{2} N^7 + \frac{7}{12} N^6 - \frac{7}{24} N^4 + \frac{1}{12} N^2$$

No. _____

17

18

⑧ M = 8 の場合

N = 10 167731333

N = 100 1.161777731 × 10¹⁷

N = 1000 1.116117778 × 10²⁶

$\frac{1}{9}$ 1161777731.....

— 1111111111.....

$\frac{1}{2}$ 50666620.....

— 50000000.....

$\frac{2}{3}$ 666620.....

— 666666.....

— 46.....

$\frac{1}{9} \times 10^9$ 167731333

— 1111111111.....

$\frac{1}{2} \times 10^8$ 56620221.888

— 50000000

$\frac{2}{3} \times 10^7$ 6620221.888

— 666666.666

— 46444.777

100000 ÷ 46444 = 2.1531306

$\frac{7}{15} \left[\frac{7}{15} \right] \frac{13}{28}$

7 ÷ 15 = 0.4666666

$-\frac{7}{15} \times 10^5$ -46444.777

 46666.666

$\frac{2}{9} \times 10^3$ 221.888

— 222.222

— 0.333

本3種の市理本1

$\frac{7}{12} \rightarrow \left[\frac{8}{12} \right] \Rightarrow \frac{2}{3}$

$\left[\frac{9}{12} \right] \Rightarrow \frac{3}{4}$ $\left[\frac{10}{12} \right] \Rightarrow \frac{5}{6}$

19

$-\frac{1}{30} \times 10$ -0.333

 0.333

 0

M = 8 の場合

$\frac{1}{9}N^9 + \frac{1}{2}N^8 + \frac{2}{3}N^7 - \frac{7}{15}N^5 + \frac{2}{9}N^3 - \frac{1}{30}N$

$\left[\frac{1}{9} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{7}{15} + \frac{2}{9} - \frac{1}{30} \right]$

$= \frac{1}{90} (10 + 45 + 60 - 42 + 20 - 3)$

$= \frac{1}{90} (90) = 1$

N = 1 の場合は成立

20

⑨ M = 9 の場合

N = 10 1574304985

N = 100 1.05074993 × 10¹⁹

N = 1000 1.0050075 × 10²⁹

$\frac{1}{10} \times 10^{10}$ 1574304985

— 1000000000

$\frac{1}{2} \times 10^9$ 574304985

— 500000000

$\frac{3}{4} \times 10^8$ 74304985

— 75000000

$-\frac{7}{10} \times 10^6$ -695015

 700000

$\frac{1}{2} \times 10^4$ 4985

— 5000

$\frac{15}{100} = \frac{3}{20} - \frac{3}{20} \times 10^2$ -15

21

No.

22

Date

$$\frac{1}{10}N^{10} + \frac{1}{2}N^9 + \frac{3}{4}N^8 - \frac{7}{10}N^6 + \frac{1}{2}N^4 - \frac{3}{20}N^2 \quad (10)$$

M=10の場合

$$\left[\begin{aligned} & \frac{1}{10} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{7}{10} + \frac{1}{2} - \frac{3}{20} \\ & = \frac{1}{20}(2+10+15-14+10-3) \\ & = \frac{1}{20}(20) = 1 \end{aligned} \right]$$

N=1の場合に成立

M=9の場合

1からNまでの和は

$$\frac{1}{10}N^{10} + \frac{1}{2}N^9 + \frac{3}{4}N^8 - \frac{7}{10}N^6 + \frac{1}{2}N^4 - \frac{3}{20}N^2$$

$$\begin{array}{r} N=10 \quad 14914341925 \\ N=100 \quad 9.599241424 \times 10^{20} \\ N=1000 \quad 9.140992424 \times 10^{31} \end{array}$$

$$\frac{1}{11} \times 10^{11} \quad 14914341925$$

$$- 9090909090.909$$

$$\frac{1}{2} \times 10^{10} \quad 5823432834.090$$

$$- 5000000000$$

$$\frac{5}{6} \times 10^9 \quad 823432834.090$$

$$- 833333333.333$$

$$= 1 \times 10^9 \quad - 9900499.243$$

$$10000000.000$$

$$1 \times 10^5 \quad 99500.756$$

$$- 100000$$

$$- 499.243$$

23

$$- \frac{1}{2} \times 10^3 \quad - 499.243$$

$$500.$$

$$0.756$$

$$- .909090$$

$$.090909$$

$$- .333333$$

$$- .242424$$

$$1.000000$$

$$- 0.242424$$

$$0.757575 \quad \leftarrow \frac{5}{6} \times 10$$

$$\frac{75}{99} = 0.757575$$

$$\frac{75}{99} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{11}N^{11} + \frac{1}{2}N^{10} + \frac{5}{6}N^9 - N^7 + N^5 - \frac{1}{2}N^3 + \frac{5}{66}N$$

$$\frac{1}{11} + \frac{1}{2} + \frac{5}{6} - 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{5}{66}$$

$$= \frac{1}{66}(6+33+55-33+5)$$

$$= \frac{1}{66}(66) = 1$$

M=10の場合

1からNまでの和は

$$\frac{1}{11}N^{11} + \frac{1}{2}N^{10} + \frac{5}{6}N^9 - N^7 + N^5 - \frac{1}{2}N^3 + \frac{5}{66}N$$

24

表 2

M=1	$\frac{1}{2} N^2 + \frac{1}{2} N$				
M=2	$\frac{1}{3} N^3 + \frac{1}{2} N^2 + \frac{1}{6} N$				
M=3	$\frac{1}{4} N^4 + \frac{1}{2} N^3 + \frac{1}{4} N^2$				
M=4	$\frac{1}{5} N^5 + \frac{1}{2} N^4 + \frac{1}{3} N^3$	$-\frac{1}{30} N$			
M=5	$\frac{1}{6} N^6 + \frac{1}{2} N^5 + \frac{5}{12} N^4$	$-\frac{1}{12} N^2$			
M=6	$\frac{1}{7} N^7 + \frac{1}{2} N^6 + \frac{1}{2} N^5$	$-\frac{1}{6} N^3$	$+\frac{1}{42} N$		
M=7	$\frac{1}{8} N^8 + \frac{1}{2} N^7 + \frac{7}{12} N^6$	$-\frac{7}{24} N^4$	$+\frac{1}{12} N^2$		
M=8	$\frac{1}{9} N^9 + \frac{1}{2} N^8 + \frac{2}{3} N^7$	$-\frac{7}{15} N^5$	$+\frac{2}{9} N^3$	$-\frac{1}{30} N$	
M=9	$\frac{1}{10} N^{10} + \frac{1}{2} N^9 + \frac{3}{4} N^8$	$-\frac{7}{10} N^6$	$+\frac{1}{2} N^4$	$-\frac{3}{20} N^2$	
M=10	$\frac{1}{11} N^{11} + \frac{1}{2} N^{10} + \frac{5}{6} N^9$	$-N^7$	$+N^5$	$-\frac{1}{2} N^3$	$+\frac{5}{66} N$