

2020.10.14

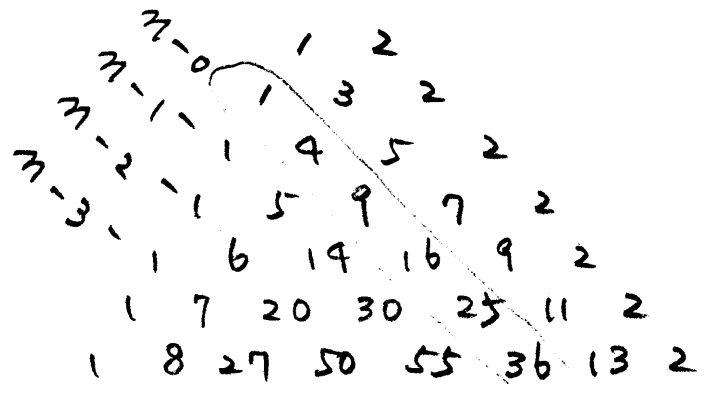
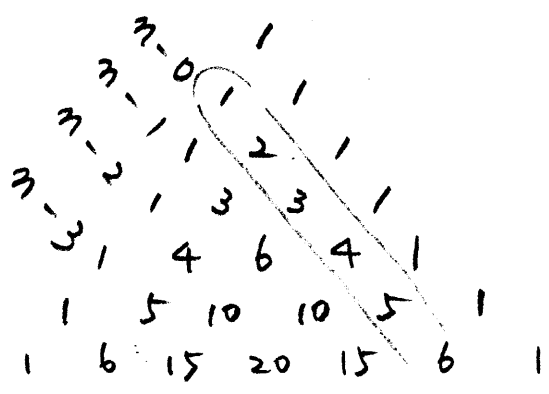
武田利一様

平方数の和の公式は平方数の和の数列と自然数の和の数列との比を利用することで簡単に求めることができました。そこで、このアイデアを台形数の分析に応用しました。台形数の $-n$ に対応する三角数を使用します。D(1.2)- n と D(1.6.6)- n の場合を例としました。一番右側の項と係数に注意するだけなので計算が楽になりました。レポート(2004.7.19)の最後の部分「台形数(1.6.6)の場合」の式にした理由を P.6 に示しました。

三角数^(S) と 台形数^(D) の比を調べる

S(1)-n

D(1,2)-n



n-0	N	1	2	3	4	5	6	N	N × N = N ²	
	D	1	4	9	16	25	36			N
	S	1	2	3	4	5	6			
	D/S	1	2	3	4	5	6			

n-1	D	1	5	14	30	55	91	$\frac{2N+1}{3}$
	S	1	3	6	10	15	21	
	D/S	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	3	$\frac{11}{3}$	$\frac{13}{3}$	
		$\frac{3}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{13}{3}$	

$$\frac{1}{2} N(N+1) \times \frac{1}{3} (2N+1) = \frac{1}{2} \frac{1}{3} N(N+1)(2N+1)$$

n-2	D	1	6	20	50	105	196
	S	1	4	10	20	35	56
	D/S	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$
		$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{7}{2}$

n-3を調べると
↑理由がわ
かります。
注意

$$\frac{N+1}{2} \Rightarrow \frac{2N+2}{4}$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{3} N(N+1)(N+2) \times \frac{1}{4} (2N+2) = \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4} N(N+1)(N+2)(2N+2)$$

	N	1	2	3	4	5	6	
$n=3$	D	1	7	27	77	182	378	
	S	1	5	15	35	70	126	
	$\frac{D}{S}$	1	$\frac{7}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{13}{5}$	3	
		$\frac{5}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{13}{5}$	$\frac{15}{5}$	$\frac{2n+3}{5}$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4} N(N+1)(N+2)(N+3) \times \frac{1}{5} (2n+3)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4} \frac{1}{5} N(N+1)(N+2)(N+3)(2n+3)$$

$n=4$	D	1	8	35	112	294	672	
	S	1	6	21	56	126	252	
	$\frac{D}{S}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	
		$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{n+2}{3} \Rightarrow \frac{2n+4}{6}$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4} \frac{1}{5} N(N+1)(N+2)(N+3)(N+4) \times \frac{1}{6} (2n+4)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4} \frac{1}{5} \frac{1}{6} N(N+1)(N+2)(N+3)(N+4)(2n+4)$$

D(1,2) - n

$$n=0 \quad N^2 \rightarrow \frac{1}{2} N (2N+0)$$

$\swarrow 2$ $\swarrow 1 \cdot n$

$$n=1 \quad \frac{1}{2} \frac{1}{3} N(N+1)(2N+1)$$

$$n=2 \quad \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4} N(N+1)(N+2)(2N+2)$$

$$n=3 \quad \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4} \frac{1}{5} N(N+1)(N+2)(N+3)(2N+3)$$

$$n=4 \quad \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4} \frac{1}{5} N(N+1)(N+2)(N+3)(N+4)(2N+4)$$

S(1)-n

n-0	1
n-1	1 1
n-2	1 2 1
n-3	1 3 3 1
n-4	1 4 6 4 1
n-5	1 5 10 10 5 1
n-6	1 6 15 20 15 6 1

D(1.6.6)-n

n-0	1	6	6						
n-1	1	7	12	6					
n-2	1	8	19	18	6				
n-3	1	9	27	37	24	6			
n-4	1	10	36	64	61	30	6		
n-5	1	11	46	100	125	91	36	6	
n-6	1	12	57	146	225	216	127	42	6

n-0	N	1	2	3	4	5	6		
	D	1	8	27	64	125	216		
	S	1	2	3	4	5	6	N	$N \times N^2 = N^3$
	$\frac{D}{S}$	1	4	9	16	25	36	N^2	

n-1	D	1	9	36	100	225	441		
	S	1	3	6	10	15	21		
	$\frac{D}{S}$	1	3	6	10	15	21	$\frac{1}{2} N(N+1)$	

$$\frac{1}{2} N(N+1) \times \frac{1}{2} N(N+1) = \frac{1}{4} N^2(N+1)^2$$

n-2	D	1	10	46	146	371	812		
	S	1	4	10	20	35	56		
	$\frac{D}{S}$	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{23}{5}$	$\frac{73}{10}$	$\frac{53}{5}$	$\frac{29}{2}$		
		$\frac{10}{10}$	$\frac{25}{10}$	$\frac{46}{10}$	$\frac{73}{10}$	$\frac{106}{10}$	$\frac{145}{10}$	$\frac{3N^2+6N+1}{10}$	

(11)	10	25	46	73		1	9	6
(9)		15	21	27		$N^2(1.2) \times 3$	$\frac{-3-6}{6}$	
(6)			6	6		$N(1) \times 6$	6	

$$\frac{1}{2} \frac{1}{3} N(N+1)(N+2) \times \frac{1}{10} (3N^2+6N+1) = \frac{1}{60} N(N+1)(N+2)(3N^2+6N+1)$$

$$D(1, 6, 6) - n$$

$$n=0 \quad N^3$$

$$n=1 \quad \frac{1}{4} N^2 (N+1)^2 \quad (aN^2 + bN + c) \\ \text{として整理可}$$

$$n=2 \quad \frac{1}{60} N(N+1)(N+2)(3N^2 + 6N + 1)$$

$$n=3 \quad \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4} \frac{1}{5} N(N+1)(N+2)(N+3)(N^2 + 3N + 1)$$

$$n=4 \quad \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4} \frac{1}{5} \frac{1}{7} N(N+1)(N+2)(N+3)(N+4)(N^2 + 4N + 2)$$

↑ $\frac{1}{6}$ が欠 + 2 いる 係数を補正可。

[修正された式]

$$n=0 \quad \frac{1}{2} \frac{1}{3} \quad N \quad (6N^2 + 0 + 0)$$

$$n=1 \quad \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4} \quad N(N+1) \quad (6N^2 + 6N + 0)$$

$$n=2 \quad \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4} \frac{1}{5} \quad N(N+1)(N+2) \quad (6N^2 + 12N + 2)$$

$$n=3 \quad \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4} \frac{1}{5} \frac{1}{6} \quad N(N+1)(N+2)(N+3) \quad (6N^2 + 18N + 6)$$

$$n=4 \quad \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4} \frac{1}{5} \frac{1}{6} \frac{1}{7} \quad N(N+1)(N+2)(N+3)(N+4)(6N^2 + 24N + 12)$$