2020.10.11

武田利一 様

三角数・台形数を書き直しました。基準となる数列を$n-0$にしました。構造を表わす式がスマートになりました。

M乗数の和の公式を求める時、M乗数の和の数列と自然数、平方数、立方数の和の数列との比を調べると計算量を少くすることができます。 4乗数、6乗数、8乗数 → 平方数

5乗数、7乗数、9乗数 → 立方数

2つにわかれます。三角数・台形数の$n-1$の一般項の「0」と対応しています。

8乗数の和の公式 $\frac{1}{9}N^9+\frac{1}{2}N^8+\frac{2}{3}N^7-\frac{7}{15}N^5+\frac{2}{9}N^3-\frac{1}{30}N$

$$=\frac{1}{90}(2N^3+3N^2+N)(5N^6+15N^5+5N^4-15N^3-N^2+9N-3)$$

↑ $N=10 \rightarrow 6534987$

N=10までの和 $167731333 = 7\times11\times17\times97\times1321$

$17\times97\times1321 = 2178329$ ×3

9乗数の和の公式 $\frac{1}{10}N^{10}+\frac{1}{2}N^9+\frac{3}{4}N^8-\frac{7}{10}N^6+\frac{1}{2}N^4-\frac{3}{20}N^2$

$$=\frac{1}{20}(N^4+2N^3+N^2)(2N^6+6N^5+N^4-8N^3+N^2+6N-3)$$

↑ $N=10$ $2602157 = 109\times23873$

N=10までの和 $1574304985 = 5\times11\times11\times109\times23873$

三角数・台形数 －パスカルの三角形の拡張－

S（三角数）　D（台形数）

① 自然数の数列の和の数列，和の和の数列…の一般項

S(1)-n

3-0　3-1　3-2　3-3

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

頂上は自然数の数列の
階差0項数列

自然数の数列は
原数列で n-0

N	0	1	2	3	4	5	6
n-0	0	1	2	3	4	5	6

N → 自然数

n-1	0	1	3	6	10	15	21

$\frac{1}{2}N(N+1)$ → 自然数の和

n-2	0	1	4	10	20	35	56

$\frac{1}{2}\frac{1}{3}N(N+1)(N+2)$

n-3	0	1	5	15	35	70	126

$\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4}N(N+1)(N+2)(N+3)$

n-4	0	1	6	21	56	126	252

$\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4}\frac{1}{5}N(N+1)(N+2)(N+3)(N+4)$

n+1 ← 頂上の項数　　　n

D (1 − 2) − n　　n − 0 は平方数の数列

n − 0, n − 1, n − 2, n − 3

1　2
1　3　2
1　4　5　2
1　5　9　7　2
1　6　14　16　9　2
1　7　20　30　25　11　2

N	1	2	3	4	5	6	7
n − 0	1	4	9	16	25	36	49
n − 1	1	5	14	30	55	91	140
n − 2	1	6	20	50	105	196	336
n − 3	1	7	27	77	182	378	714

n − 0　$1/2 \quad N(2N+0) = N^2$

n − 1　$1/2\cdot3 \quad N(N+1)(2N+1)$

n − 2　$1/2\cdot3\cdot4 \quad N(N+1)(N+2)(2N+2)$

n − 3　$1/2\cdot3\cdot4\cdot5 \quad N(N+1)(N+2)(2N+3)(2N+3)$

n + 2 ← 頂上の項数　　　n

n − 0　$2N+0$
n − 1　$2N+1$
n − 2　$2N+2$
n − 3　$2N+3$

第1項の係数は 2（定数）

第2項は 1・n（1次式）

頂上の 1，2 に対応する

D (1, 6, 6) − n $n-0$は立方数の数列

1 6 6
1 7 12 6
1 8 19 18 6
1 9 27 37 24 6
1 10 36 64 61 30 6
1 11 46 100 125 91 36 6
1 12 57 146 225 216 127 42 6

N	1	2	3	4	5	6	7
$n-0$	1	8	27	64	125	216	
$n-1$	1	9	36	100	225		
$n-2$	1	10	46	146			
$n-3$	1	11	57				

$n-0 \quad \frac{1}{6} \quad N \left(6N^2 + 0 + 0\right) = N^3$

$n-1 \quad \frac{1}{24} \quad N(N+1)\left(6N^2 + 6N + 0\right) = \frac{1}{4}N^2(N+1)^2$

$n-2 \quad \frac{1}{120} \quad N(N+1)(N+2)\left(6N^2 + 12N + 2\right)$

$n-3 \quad \frac{1}{720} \quad N(N+1)(N+2)(N+3)\left(6N^2 + 18N + 6\right)$

$720 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$

$n+3$ 項上の数

n

$6N^2 + 0 + 0$
$6N^2 + 6N + 0$
$6N^2 + 12N + 2$
$6N^2 + 18N + 6$

6 − 第1項 定数 6
6 − 第2項 1次式 $6n$
1 − 第3項 2次式 $1 \cdot n^2 - n$

D (1, 14, 36, 24) − n　n−0は4乗数の数列

n-0	1	14	36	24					
n-1	1	15	50	60	24				
n-2	1	16	65	110	84	24			
n-3	1	17	81	175	194	108	24		
	1	18	98	256	369	302	132	24	
	1	19	116	354	625	671	434	156	24

N	1	2	3	4	5	6	7
n-0	1	16	81	256	625	1296	2401
n-1	1	17	98	354	979	2275	4676
n-2	1	18	116	470	1449	3724	8400
n-3	1	19	135	605	2054	5778	14178

n-0　$1/4!$　$N\ (24N^3+0+0+0)$

n-1　$1/5!$　$N\ (N+1)\ (24N^3+36N^2+4N-4)$

n-2　$1/6!$　$N\ (N+1)(N+2)(24N^3+72N^2+36N-12)$

n-3　$1/7!$　$N\ (N+1)(N+2)(N+3)\ (24N^3+108N^2+96N-18)$

n-4　$1/8!$　$N\ (N+1)(N+2)(N+3)(N+4)\ (24N^3+144N^2+184N-16)$

$n+4$ 頂上の数　$(N+n)$

aN^3+bN^2+cN+d

a	24
b	$36n$
c	$14n^2-10n$
d	$1\cdot n^3-5n^2$

D(1, 30, 150, 240, 120) − n　n−0は5乗数の数列

n − 0　$1/5!$　$N\ (120N^4 + 0 + 0 + 0 + 0)$

n − 1　$1/6!$　$N(N+1)$
$(120N^4 + 240N^3 + 60N^2 - 60N + 0)$

n − 2　$1/7!$　$N(N+1)(N+2)$
$(120N^4 + 480N^3 + 420N^2 - 120N - 60)$

n − 3　$1/8!$　$N(N+1)(N+2)(N+3)$
$(120N^4 + 720N^3 + 1080N^2 + 0 - 240)$

n − 4　$1/9!$　$N(N+1)(N+2)(N+3)(N+4)$
$(120N^4 + 960N^3 + 2040N^2 + 480N - 576)$

$aN^4 + bN^3 + cN^2 + dN + e$

a　120
b　$240n$
c　$150n^2 - 90n$
d　$30n^3 - 90n^2$
e　$1 \cdot n^4 - 16n^3 + 11n^2 + 4n$

n − 1　について

S(1) − 1　N　$\frac{1}{2}N(N+1)$　1

D(1, 2) − 1　N^2　$\frac{1}{6}N(N+1)$　$(2N+1)$

D(1, 6, 6) − 1　N^3　$\frac{1}{24}N(N+1)$　$(6N^2 + 6N + 0)$　0

D(1, 14, 36, 24) − 1　N^4　$\frac{1}{120}N(N+1)$　$(24N^3 + 36N^2 + 4N - 4)$

D(1, 30, 150, 240, 120)　N^5　$\frac{1}{720}N(N+1)$
$(120N^4 + 240N^3 + 60N^2 - 60N + 0)$　0

N^3、N^5の時、(　)内の定数項が0になっている
⇓
$\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ と関係がありそうです。