2020.10.8

武田利一 様

春の遅れをとりもどそうと若者たちは さわやかな秋風の中で勉学にはげんでいます。 私もまけられません。

柴垣和三雄さんが訳された「数学における発見はいかになされるのか」1 帰納と類比」 By G. Polya （昭和34年 丸善）

P.121〜P.123 では 平方の和の公式について書かれています。

$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ は既知とします。

n	=	1	2	3	4	5	6
$1+2+\cdots+n$	=	1	3	6	10	15	21
$1^2+2^2+\cdots+n^2$	=	1	5	14	30	55	91

比を調べてみようというアイディア

n	=	1	2	3	4	5	6
$\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{1+2+\quad+n}$	=	1	$\dfrac{5}{3}$	$\dfrac{7}{3}$	3	$\dfrac{11}{3}$	$\dfrac{13}{3}$
$\dfrac{2n+1}{3}$	$\longleftarrow$	$\dfrac{3}{3}$	$\dfrac{5}{3}$	$\dfrac{7}{3}$	$\dfrac{9}{3}$	$\dfrac{11}{3}$	$\dfrac{13}{3}$

分母をそろえると分子が2つづつ大きくなっていることがわかる。 ⟶ 1次式で表わせる。

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{(2n+1)}{3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$n=7$ を入れて確かめる。

$$1+4+9+16+25+36+49=140$$

$$\frac{7\cdot 8\cdot 15}{6}=140$$

$(n+1)^2$ の場合で考える。

$$(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

比を調べてみようというアイディアを使います。　4乗数の和の場合

n	n^4の和	n和	n^4の和/nの和	n^2の和	n^4の和/n^2の和	階差1	階差2 (2次式)
0	0	0	0	0	$(-\frac{1}{5})$		
						$(1\frac{1}{5})$	
1	1	1	1	1	1		$(1\frac{1}{5})$
						$2\frac{2}{5}$	
2	17	3	$5\frac{2}{3}$	5	$3\frac{2}{5}$		$1\frac{1}{5}$
						$3\frac{3}{5}$	
3	98	6	$16\frac{1}{3}$	14	7		$1\frac{1}{5}$
						$4\frac{4}{5}$	
4	354	10	$35\frac{2}{5}$	30	$11\frac{4}{5}$		$1\frac{1}{5}$
						6	
5	979	15	$65\frac{4}{15}$	55	$17\frac{4}{5}$		$1\frac{1}{5}$
						$7\frac{1}{5}$	
6	2275	21	$108\frac{1}{3}$	91	25		$1\frac{1}{5}$
						$8\frac{2}{5}$	
7	4676	28	167	140	$33\frac{2}{5}$		$1\frac{1}{5}$
						$9\frac{3}{5}$	
8	8772	36	$243\frac{2}{3}$	204	43		$1\frac{1}{5}$
						$10\frac{4}{5}$	
9	15333	45	$340\frac{11}{15}$	285	$53\frac{4}{5}$		$1\frac{1}{5}$
						12	
10	25333	55	$460\frac{3}{5}$	385	$65\frac{4}{5}$		

$$-\frac{1}{5} \quad 1\frac{1}{5} \quad 1\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\cdot\frac{1}{5}(3n^2+3n-1) \qquad \times\frac{1}{5} \qquad -1 \quad 6 \quad 6$$

$$n^2(1.2)\times 3 \qquad -3 \quad -6$$

$$= \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) \qquad 3$$

$$n(1)\times 3 \qquad -3$$

$$0$$

n^4の和/nの和 を使うと計算がめんどうになります。
(3次式で補正するので)

5乗数の場合　$n=10$までの和の数値を使って

n^5の和/n^3の和を調べます。

$220825 \div 55 = 4015$　　$4015 \div 55 = 73$

$(n^2) \div 385 = 573\ 4/7$

$(n^3) \div 3025 = 73$

n	n^5の和	n^3の和	n^5の和/n^3の和	階差1	階差2
				← 定数項	(2次式)
0	0	0	$(-1/3)$		
				$(1\,1/3)$	
1	1	1	1		$(1\,1/3)$
				$2\,2/3$	
2	33	9	$3\,2/3$		$1\,1/3$
				4	
3	276	36	$7\,2/3$		$1\,1/3$
				$5\,1/3$	
4	1300	100	13		$1\,1/3$
				$6\,2/3$	
5	4425	225	$19\,2/3$		$1\,1/3$
				8	
6	12201	441	$27\,2/3$		$1\,1/3$
				$9\,1/3$	
7	29008	784	37		$1\,1/3$
				$10\,2/3$	
8	61776	1296	$47\,2/3$		$1\,1/3$
				12	
9	120825	2025	$59\,2/3$		$1\,1/3$
				$13\,1/3$	
10	220825	3025	73		

$$\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \cdot \frac{1}{3}(2n^2+2n-1)$$

$$= \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$$

$\times\ 1/3$　　$-1/3$　-1

$n^2(1,2)\times 2$

$n(1)\times 2$

$1\,1/3$	$1\,1/3$
4	4
-2	-4
2	
-2	
0	

7乗数の場合　$n=10$までの和の数値を使って

n^7の和／n^3の和

を調べます。

$18080425 \div 55 = 328735$
$(n^2) \div 385 = 46962\ 1/7$
$(n^3) \div 3025 = 5977$
$(n^4) \div 25333 = 713.710377768$
$(n^5) \div 220825 = 81.8767123287$

n	n^7	n^7の和	n^3の和	n^7の和／n^3の和
0	0	0	0	
1	1	1	1	1
2	128	129	9	14 1/3
3	2187	2316	36	64 1/3
4	16384	18700	100	187
5	78125	96825	225	430 1/3
6	279936	376761	441	854 1/3
7	823543	1200304	784	1531
8	2097152	3297456	1296	2544 1/3
9	4782969	8080425	2025	3990 1/3
10	10000000	18080425	3025	5977

n	n^7の和/n^3の和	階差1	階差2	階差3	階差4 (4次式)
0	(1/3) ← 定数項				
		(2/3)			
1	1		(12 2/3)		
		13 1/3		(24)	
2	14 1/3		36 2/3		(12)
		50		36	
3	64 1/3		72 2/3		12
		122 2/3		48	
4	187		120 2/3		12
		243 1/3		60	
5	430 1/3		180 2/3		12
		424		72	
6	854 1/3		252 2/3		12
		676 2/3		84	
7	1531		336 2/3		12
		1013 1/3		96	
8	2544 1/3		432 2/3		12
		1446		108	
9	3990 1/3		540 2/3		
		1986 2/3			
10	5977				

$\times 1/3$		1/3	2/3	12 2/3	24	12
	$\times 1/3$	1	2	38	72	36
$\frac{3}{2}n^4$	n^4 (1, 14, 36, 24) $\times 3/2$		$-3/2$	-21	-54	-36
			1/2	17	18	
$3n^3$	n^3 (1, 6, 6) $\times 3$		-3	-18	-18	
			$-2\ 1/2$	-1		
$-\frac{1}{2}n^2$	n^2 (1, 2) $\times (-1/2)$		$+1/2$	$+1$		
			-2			
$-2n$	n (1) $\times (-2)$		$+2$			
			0			
1						

$$\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}n^4+3n^3-\frac{1}{2}n^2-2n+1\right)$$

$$=\frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)$$

$$=\frac{1}{24}(n^4+2n^3+n^2)(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)$$

$$\begin{array}{rrrrrrr}
3n^8 & +6n^7 & -n^6 & -4n^5 & +2n^4 & & \\
 & +6n^7 & +12n^6 & -2n^5 & -8n^4 & +4n^3 & \\
 & & +3n^6 & +6n^5 & -n^4 & -4n^3 & +2n^2 \\
\hline
\end{array}$$

$$\frac{1}{24}(3n^8+12n^7+14n^6-7n^4+2n^2)$$

$$=\frac{1}{8}n^8+\frac{1}{2}n^7+\frac{7}{12}n^6-\frac{7}{24}n^4+\frac{1}{12}n^2$$

比を調べてみようというアイディアと階差の項数列を使う方法を組み合わせてみました。7乗数の数列の和の公式はこのようにして求めることができました。「比を調べる」を一般化したものが素数を利用する要素分析法です。

$n=10$ のとき

$5 \rightarrow \frac{1}{2}n$　　$5\times2=10$

$7 \rightarrow \frac{1}{3}(2n+1)$　　$7\times3=21$ $=20+1$

$11 \rightarrow (n+1)$　　$11=10+1$

M乗数の数列の和　1^Mから10^Mまでの和の数値

M	和の数値	素因数分解	数列の和の公式
1	55	5×11	$\frac{1}{2}n(n+1)$
2	385	$5\times 7\times 11$	$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
3	3025	$5\times 5\times 11\times 11$	$\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$
4	25333	$7\times 7\times 11\times 47$	$7\times 47=329$ $\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$
5	220825	$5\times 5\times 11\times 11\times 73$	$73\times 3=219$ $\frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$
6	1978405	$5\times 11\times 13\times 2767$	$13\times 2767=35971$ $\frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)$
7	18080425	$5\times 5\times 11\times 11\times 43\times 139$	$43\times 139\times 6=35862$ $\frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)$
8	167731333	$7\times 11\times 17\times 97\times 1321$	
9	1574304985	$5\times 11\times 11\times 109\times 23873$	

連立方程式を使う方法　（4乗数の和の公式）

$ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex$ とすると計算が大変です。

自然数の和の公式　$\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$

平方数の和の公式　$\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$

立方数の和の公式　$\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2$

4乗数の和の公式　$\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+$

$\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+cn^3+dn^2+en$　と予想します。

$n=1$　$\frac{1}{5}\times 1^5+\frac{1}{2}\times 1^4+c\cdot 1^3+d\cdot 1^2+e\cdot 1$

$=\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+c+d+e=1$

$c+d+e=1-\frac{1}{5}-\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$

$n=2$　$\frac{1}{5}\times 2^5+\frac{1}{2}\times 2^4+c\cdot 2^3+d\cdot 2^2+e\cdot 2$

$=\frac{32}{5}+\frac{16}{2}+8c+4d+2e=17$

$8c+4d+2e=17-\frac{32}{5}-8=2\frac{3}{5}$

$n=3$　$\frac{1}{5}\times 3^5+\frac{1}{2}\times 3^4+c\cdot 3^3+d\cdot 3^2+e\cdot 3$

$=\frac{243}{5}+\frac{81}{2}+27c+9d+3e=98$

$27c+9d+3e=98-\frac{243}{5}-\frac{81}{2}=8\frac{9}{10}$

$c+d+e=\frac{3}{10}$ —① ①×2 $2c+2d+2e=\frac{3}{5}$

$8c+4d+2e=2\frac{3}{5}$ —② ①×3 $3c+3d+3e=\frac{9}{10}$

$27c+9d+3e=8\frac{9}{10}$ —③

②−①×2

$8c+4d+2e-(2c+2d+2e)=6c+2d=2$

$6c+2d=2 \rightarrow 3c+d=1$ —④

③−①×3

$27c+9d+3e-(3c+3d+3e)=24c+6d=8$

$24c+6d=8 \rightarrow 12c+3d=4$ —⑤

④×3 $9c+3d=3$

⑤−④×3

$12c+3d-(9c+3d)=3c=4-3=1$

$c=\frac{1}{3}$

④に $c=\frac{1}{3}$ を代入する。 $3\times\frac{1}{3}+d=1+d=1$ $d=0$

①に $c=\frac{1}{3}$ $d=0$ を代入する。

$\frac{1}{3}+0+e=\frac{3}{10}$ $e=\frac{3}{10}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{30}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^4=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n$$

$n=10$ $\frac{1}{5}\times10^5+\frac{1}{2}\times10^4+\frac{1}{3}\times10^3-\frac{1}{30}\times10=25333$

M乗数の和の公式 は 積の形と和の形で異なる性質を知ることができます。平方根を分数と小数で考えた時にも思いました。異なる視点を組みあわせることは大切です。目的は大量に効率的に計算をすることだからです。組織された数列は作られ方により共通の性質をもっています。M乗数の階差数列の一般項の式を、大量に効率的に作ることができることにおどろきました。$(N+1)^M - N^M$ の係数と階差0項数列 1, 2-1, 6-6-1, 24-36-14-1, 120-240-150-30-1 の積によって次々と求めることができました。階差数列とは反対に上に向かっていく数列は向きを変えて、パスカルの三角形を変形した台形数を使って行いました。M乗数の数列の和の和の和…の分析です。まだやりかけです。

パスカルの三角形との共通部分があります。階差0項数列は、一般項の係数となってあらわれました。

2000年の秋は、春に作ったレポート（レポート 2019.10.22）を見なおしました。

A 1÷7について は 1÷7=0.$\dot{1}4285\dot{7}$ 142+857=999 に気がついたことで、1÷Nの表を作って分析しました。

B については ポケットコンピュータを使った数表作りと数値分析を行いました。十進法を利用する係数分解法 で 和の形で求めました。これまで求めることのできなかった 4乗数以上の和の公式を自分のものにできました。

M乗数の数列の和を求める 階差0項数列を使って（レポート2004.7.19）は20年前の10月に作りました。①階差を作り 0項に着目しました。1項ではなく0項です。項の数が1つ少くできます。②作り方の規則性がわかりました。 N－Nの和－N^2－N^2の和－N^3－N^3の和－N^4 とサンドイッチ構造になっています。階差を作らなくてもM乗数の和の0項数列を求めることができます。③の変化の規則性の表を作ることで、やっと、数列の一般項を求める方法がわかりました。④は使用例です。十進法を利用する係数分解法であらかじめ求めてあった式なので係数がマイナスになってもおどろきませんでした。三角数、台形数の分析は目の前にある階差0項数列のかたまりを分析することでした。横の1行がななめの数列に対応しています。経験則と構造決定の考え方を使いました。

2001年はM進法における $1/N$ について調べ 7進法においての $1 \div 5$ と $1 \div 5^2$ のどちらも循環節が4桁であることを知りました。

$7^2+1=2\times5^2$ を $\sqrt{2} \fallingdotseq \frac{7}{5}$ とむすびつける連分数という考え方を教えていただきました。 $\sqrt{7} \fallingdotseq \frac{3316587322\,4}{1253552179\,5}$ を求めることができました。知らなかったことが次々とわかっていくことは、とても楽しいものです。

SHARP ELSIMATE EL-326S（8桁の電卓）はよく働いてくれました。今はCASIO MH-120Lを使っています。