武田 利一 様

2020.9.2

林 邦英

平方根を求める考え方あれやこれやの①から⑤は⑥から⑩よりもわかりづらいと思います。日本では開平法による求め方が主流だからです。そこで、ラファエル・ボンベリさん(1526-1572)が証明した連分数をさかのぼるというレポートで、形成過程をふり返ってみました。

今年の2月に異なる分野を研究されている方よりわかりにくいと御意見をいただき、どうしたらわかりやすく説明できるのかと考えてきましたが、よくわかりません。

もしよろしければ、御意見をお知らせ下さい。

コクヨ ケー35 20×20

① $\frac{a+b}{2} > \sqrt{a\cdot b} > \frac{2\cdot a\cdot b}{a+b}$ の反復法以外の使い方

$$\sqrt{a\cdot b} \fallingdotseq \frac{a+b+2\cdot a\cdot b}{2+a+b} \quad (a\cdot b \to 1) \qquad X^{\frac{1}{N}} \fallingdotseq \frac{(N+1)X+(N-1)}{(N-1)X+(N+1)}$$

$Ans^2 = 1.1025$ $\qquad$ $Ans^2 = 1.0975$ $\qquad$ $Ans^2 = 1.09994$

$$\frac{21}{20} = \frac{\frac{10}{10}+\frac{11}{10}}{2} > \sqrt{1.1} = \sqrt{\frac{10}{10}\cdot\frac{11}{10}} > \frac{22}{21} \qquad \frac{21+22}{20+21} = \frac{43}{41}$$

1に近い数の平方根のだいたいの値は？　計算の始まりが簡単です。

① 求めたい数値を分数で表わします。

② 分子と分母を加え　2倍します。

③ 分子から分母を引きます。

④ ②に③を加えたものを分子 ②から③を引いたものを分母にします。

⑤ ③を3乗します。

⑥ ⑤を ①の分母 × 2 × ④の分子 × ④の分母で割ます。

⑦ ④に⑥を加えます。　これが求めたい数値です。

$\sqrt{1.3}$ を例とします。

① $1.3 = \frac{13}{10}$ ② $(13+10)\times 2 = 46$ ③ $13-10=3$

④ $46+3 = 49$, $46-3 = 43$ $\boxed{\frac{49}{43}}$ 2乗すると $\boxed{1.2985\ldots}$ ⑤ $3^3 = 27$

⑥ $27 \div (10\times 2\times 49\times 43) = 27 \div 42140$

⑦ $\frac{49}{43} + \frac{27}{42140} = \boxed{\frac{48047}{42140}}$ 2乗すると $\boxed{1.30000041051}$

④ではものたりなくても ⑦ならば満足していただけそうです。

$$\frac{\frac{21}{20}+\frac{22}{21}}{2}=\frac{881}{840} \quad \left(\frac{881}{840}\right)^2=1.10000141721$$

とするのが反復法ですが、ここでは $\dfrac{21+22}{20+21}=\dfrac{43}{41}$
としています。

計算の始まりが簡単です。

$\sqrt{1.1}$ を求めたい時　小数を分数に直すだけです。

$$\frac{11}{10} \qquad (11+10)\times 2=42 \qquad 11-10=1$$

$$\frac{42+1}{42-1}=\frac{43}{41} \qquad ans^2=1.09994051159$$

倍精度にするには、　$1^3=1$

$$\frac{43}{41}+\frac{1}{10\times 2\times 43\times 41}=\frac{36981}{35260}$$

$$ans^2=1.10000000079$$

数あそびのような意外性がおもしろいと思います。

② $A+\frac{x}{2A} > \sqrt{A^2+x} > A+\frac{x}{2A+1} \Rightarrow$ ③ $\sqrt{A^2+x} < A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+1}}$

②の右辺の改良と連分数の始まり

$\sqrt{25}$ より $\sqrt{36}$ までを求めます。

$$\sqrt{5^2+x} < 5+\cfrac{x}{10+\cfrac{x}{11}} \qquad \sqrt{A^2+x} < A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+1}}$$

$(0 < x < 11)$ $\qquad$ $(0 < x < 2A+1)$

x	$\sqrt{N}$		[2A+1]		2乗すると
0	25	$5+\frac{0}{110}$		5	25
1	26	$5+\frac{11}{111}$	分子 +11	5.099099	26.00081
2	27	$5+\frac{22}{112}$	分母 +1	5.196429	27.00287
3	28	$5+\frac{33}{113}$		5.292035	28.00564
4	29	$5+\frac{44}{114}$		5.385965	29.00862
5	30	$5+\frac{55}{115}$		5.478261	30.01134
6	31	$5+\frac{66}{116}$		5.568966	31.01338
7	32	$5+\frac{77}{117}$		5.658120	32.01432
8	33	$5+\frac{88}{118}$		5.745763	33.01379
9	34	$5+\frac{99}{119}$		5.831933	34.01144
10	35	$5+\frac{110}{120}$		5.916667	35.00694
11	36	$5+\frac{121}{121}$		6	36

②の右辺ではこうなります。

x	$\sqrt{N}$			2乗すると
5	30	$5+\frac{5}{11}$	5.4545	29.75
6	31	$5+\frac{6}{11}$	5.5455	30.75
7	32	$5+\frac{7}{11}$	5.6364	31.77
8	33	$5+\frac{8}{11}$	5.7273	32.80

精度を良くするには もう一段ふやします。

$$\sqrt{5^2+x} > 5+\cfrac{x}{10+\cfrac{x}{10+\cfrac{x}{11}}}$$

$(0<x<11)$

不等号の向きが逆になります。

分数に直す計算に工夫がいります。

x $\sqrt{N}$

5 30 $5+\cfrac{5}{10+\cfrac{5}{10+\cfrac{5}{11}}} = \frac{6600}{1205} = \frac{1320}{241} = 5+\frac{115}{241}$

$$\frac{1}{0} \quad \frac{5}{1} \quad \overset{5/10}{\frac{1\times5+5\times10}{0\times5+1\times10}} = \frac{55}{10} \quad \overset{5/10}{\frac{5\times5+55\times10}{1\times5+10\times10}} = \frac{575}{105} \quad \overset{5/11}{\frac{55\times5+575\times11}{10\times5+105\times11}}$$

$5+\frac{55}{115} = 5+\frac{11}{23}$ 　　30.0113421549

2乗します。

$\frac{6600}{1205} = 5+\frac{115}{241}$ 　　29.9994834798

平方根を求める考え方の始まりと ② $A+\frac{x}{2A} > \sqrt{A^2+x} > A+\frac{x}{2A+1}$

の成立 （ $\frac{a+b}{2} > \sqrt{a\cdot b} \Rightarrow A+\frac{x}{2A} > \sqrt{A^2+x}$ ）

平方数の平方根は自然数になります。平方数以外の場合も数として認めることから始まります。

1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

7の平方根は 2よりも大きくて 3よりも小さい。 $2<\sqrt{7}<3$

求めたい数を表わす方法のちがいは 求め方のちがいに発展します。

積の形 $\sqrt{a\cdot b}$ 　　　　 $\sqrt{A^2+x}$ 和の形

$\frac{4+5}{2} > \sqrt{4\times5} = \sqrt{20}$

$4.5^2 = 20.25$

異なる2つの数字の平均は平方根よりも大きくなります。

$\frac{a+b}{2} > \sqrt{a\cdot b}$

$\sqrt{19} = \sqrt{4^2+3} > 4+\frac{3}{4\times2+1}$

$25-16=9=4\times2+1$ 　 $(4\frac{1}{3})^2 = 18.77\cdots$

$16<19<25$ なので 4から5までを直線でむすびました。

$\sqrt{A^2+x} > A+\frac{x}{2A+1}$

$2\times\frac{7}{2} = 7 = 2^2+3$

$\frac{2+\frac{7}{2}}{2} > \sqrt{7}$ 　　 $2+\frac{3}{4} > \sqrt{7} > 2+\frac{3}{2\times2+1}$

$= \frac{11}{4}$ 　　　　　　　　　　 $= 2+\frac{3}{5}$

$7=2^2+3$

$2+\frac{3}{4}$ ←2×2

$= 2+\frac{3}{4}$

$A+\frac{x}{2A} > \sqrt{A^2+x} > A+\frac{x}{2A+1}$

が生まれました。

ものごとの始まりを考えることが一番むつかしいと思います。

私は　$2 < \sqrt{7} < 3$　という $\sqrt{7}$ のような数の存在を認めることを始まりとしました。

②の左辺は①の左辺の数値分析によって求められたという考え方をとりました。微分法の発明されるずっと古くからこの式が使われていたからです。同じように古い①の左辺との関係を調べました。式の形で考えていてもさっぱりわかりませんでしたが、具体的な数値を入れて考えたら、とてもよくわかりました。

$\sqrt{19}$　　$4^2 = 16 < 19 < 25 = 5^2$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{4 + \frac{19}{4}}{2} = \frac{16+19}{8} = \frac{35}{8} = 4 + \frac{3}{8} \\ &\qquad\qquad\qquad 19 = 4^2 + 3 \end{aligned}\right]$$

$$\begin{array}{ccc} 4^2 & + & 3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 4 & + & \frac{3}{8} \\ & & \uparrow \\ & & 4 \times 2 \end{array}$$

$$\sqrt{A^2+x} > A + \frac{x}{2A+1}$$

の式は先に知っていたと思います。$\boxed{+1}$ をなくすだけでした。

左右の不等号は完成しました。

ラファエル・ボンベリさん(1526−1572)が証明した連分数をさかのぼる

④
$$\sqrt{A^2+x} = A + \cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+}}}}}$$

無限の連分数により、等号は成立する。

$$\sqrt{7} = 2 + \boxed{\sqrt{7}-2} = 2 + \frac{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}{\sqrt{7}+2} = 2 + \frac{3}{\sqrt{7}+2} = 2 + \frac{3}{4+\boxed{\sqrt{7}-2}}$$

③''の左辺が独立して④になる。

③''
$$A + \cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A}}} > \sqrt{A^2+x} > A + \cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+1}}} \quad (0 < x < 2A+1)$$

2A+1は1つだけ　区間近似式

精度を良くするために一段多くつみあげる。不等号の向きは逆になる。

③'
$$A + \cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A}} < \sqrt{A^2+x} < A + \cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+1}} \quad (0 < x < 2A+1)$$

左辺を作り、不等号を完成させる。

③
$$\sqrt{A^2+x} < A + \cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+1}} \quad (0 < x < 2A+1)$$

xの変化による傾きの変化に対応するため、左辺と右辺を1つにした式にする。

②
$$A + \frac{x}{2A} > \sqrt{A^2+x} > A + \frac{x}{2A+1} \quad (0 < x < 2A+1)$$

$\boxed{0-2}$ の左辺は $\boxed{0-1}$ の変形

$\boxed{0-1}$ 大きい不等式

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{a \cdot b} \quad \overset{\text{数値分析}}{\Longrightarrow} \quad A + \frac{x}{2A} > \sqrt{A^2+x}$$

積の形

$$7 = 2 \times \frac{7}{2} \qquad \sqrt{2 \times \frac{7}{2}} < \frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4} = \boxed{2 + \frac{3}{2\times 2}}$$

ちがいは +1

$\boxed{0-2}$ 小さい不等式

$$(0 < x < 2A+1) \quad \sqrt{A^2+x} > A + \frac{x}{2A+1}$$

和の形

$$7 = 2^2+3 \qquad \sqrt{2^2+3} > 2 + \frac{3}{5} = \boxed{2 + \frac{3}{2\times 2+1}}$$

$\boxed{0-0}$

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
N^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81
(差)		3	5	7	9	11	13	15	17 ← 2N+1

$4 < \sqrt{20} < 5 \qquad 20 = 4 \times 5 \longrightarrow \boxed{0-1} \qquad (4.5)^2 = 20.25$

$4 < \sqrt{19} < 5 \qquad 19 = 4^2+3 \longrightarrow \boxed{0-2} \qquad (4\tfrac{3}{9})^2 = 18.78$

平方根を求める考え方 あれやこれや

① $\dfrac{a+b}{2} > \sqrt{a\cdot b} > \dfrac{2\cdot a\cdot b}{a+b}$ $\dfrac{4+\frac{19}{4}}{2} = \dfrac{35}{8}$ $\dfrac{\frac{35}{8}+\frac{19\times 8}{35}}{2} = \dfrac{2441}{560}$

$\left(\dfrac{35}{8} = 4+\dfrac{3}{8}\right)$ $19 = 4\times\dfrac{19}{4}$

$19 = 4^2+3$

$4^2 - 19\times 1^2 = -3$

$35^2 - 19\times 8^2 = 9$

$2441^2 - 19\times 560^2 = 81$

② $A+\dfrac{x}{2A} > \sqrt{A^2+x} > A+\dfrac{x}{2A+1}$

A	1	2	3	4	5
	1	4	9	16	25
2A+1	3	5	7	9	

$(4+\frac{3}{8})^2 = 19.14$ $(4+\frac{3}{9})^2 = 18.78$

③ $\sqrt{A^2+x} < A+\dfrac{x}{2A+\dfrac{x}{2A+1}}$

$4+\dfrac{x}{8+\frac{x}{9}}$ $16 < 4^2+x < 25$ $0 < x < 9$

$6+\dfrac{x}{12+\frac{x}{13}}$ $36 < 6^2+x < 49$ $0 < x < 13$

$4+\dfrac{3}{8+\frac{3}{9}} = \dfrac{109}{25}$ $\left(\dfrac{109}{25}\right)^2 = 19.01$

④ $\sqrt{A^2+x} = A+\dfrac{x}{2A+\dfrac{x}{2A+\dfrac{x}{2A+}}}$

$\sqrt{1+x} \fallingdotseq 1+\dfrac{x}{2+\frac{x}{2}} = 1+\dfrac{2x}{4+x}$

双曲線近似法

$\dfrac{4}{1} \to 4+\dfrac{3}{8+\dfrac{3}{8+\dfrac{3}{8+\dfrac{3}{8+}}}}$

$\dfrac{35}{8}$ $\dfrac{292}{67}$ $\dfrac{2441}{560}$ $\dfrac{20404}{4681}$

$292^2 - 19\times 67^2 = -27$

$20404^2 - 19\times 4681^2 = -243$

最良近似分数

⑤ $\sqrt{19} \fallingdotseq \dfrac{170}{39}$ $170^2 - 19\times 39^2 = 1$

$57799^2 - 19\times 13260^2 = 1$

$\dfrac{\frac{170}{39}+\frac{19\times 39}{170}}{2} = \dfrac{57799}{13260}$

$\sqrt{19} = 4+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{8+\dfrac{1}{2+}}}}}}}$

$\dfrac{9}{2}\to 2$, $\dfrac{13}{3}\to 1$, $\dfrac{48}{11}\to 3$, $\dfrac{61}{14}\to 1$, $\dfrac{170}{39}\to 2$

$9^2 - 19\times 2^2 = 5$

$13^2 - 19\times 3^2 = -2$

$48^2 - 19\times 11^2 = 5$

$61^2 - 19\times 14^2 = -3$

4 2 1 3 1 2 8

$4\times 2 = 8$

① $\frac{a+b}{2} > \sqrt{a\cdot b} > \frac{2\cdot a\cdot b}{a+b}$ 両辺を加える ①' $\frac{a+b+2\cdot a\cdot b}{2+a+b} < \sqrt{a\cdot b}$

$(a\cdot b \to 1)$

$\frac{21}{20} = \frac{\frac{10}{10}+\frac{11}{10}}{2} > \sqrt{\frac{10}{10}\cdot\frac{11}{10}} > \frac{20\cdot 11}{21\cdot 10} = \frac{22}{21}$ $\qquad \frac{a+b+2\cdot 1}{2+a+b} = 1 = \sqrt{1}$

$\frac{21+22}{20+21} = \frac{43}{41} = 1+\frac{2}{41}$

$\sqrt{1+0.1} > 1+\frac{2\times 0.1}{4+0.1} = 1+\frac{2}{41}$

$\sqrt{1+x} > 1+\frac{2x}{4+x} = 1+\frac{x}{2+\frac{x}{2}}$

③'

$A+\frac{x}{2A+\frac{x}{2A}} < \sqrt{A^2+x} < A+\frac{x}{2A+\frac{x}{2A+1}}$

$\boxed{\frac{11}{10}}$ $11+10=21$, $21\times 2=42$, 42^{+1}_{-1} $\frac{43}{41}$ $11-10=1$

$\frac{43}{41} + \frac{1}{10\times 2\times 43\times 41}$

$\boxed{\frac{13}{10}}$ $13+10=23$, $23\times 2=46$, 46^{+3}_{-3} $\frac{49}{43}$ $13-10=3$

$\frac{49}{43} + \frac{27}{10\times 2\times 49\times 43}$ $\qquad 3^3=27$

③''

$$A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A}}} > \sqrt{A^2+x} > A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+1}}}$$

$\sqrt{19}=\sqrt{4^2+3}$

$\frac{1}{0}$ $\quad \frac{4}{1}$ $\quad \overset{3/8}{\frac{3+32}{0+8}} = \frac{35}{8}$ $\quad \overset{3/8}{\frac{12+280}{3+64}} = \frac{292}{67}$ $\quad \overset{3/8}{\frac{105+2336}{24+536}} = \frac{2441}{560}$ (19.0002··) $\quad \overset{3/9}{\frac{105+2628}{24+603}} = \frac{2733}{627}$ (18.9995··)

④

$$\sqrt{A^2+x} = A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+}}}}}}$$

$\sqrt{2} = 1+\sqrt{2}-1$

$= 1+\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1}$

$= 1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}$

$= 1+\frac{1}{2+\sqrt{2}-1}$

$\sqrt{7} = 2+\sqrt{7}-2$

$= 2+\frac{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}{\sqrt{7}+2}$

$= 2+\frac{3}{\sqrt{7}+2}$

$= 2+\frac{3}{4+\sqrt{7}-2}$