武田 利一 様

2020.8.2

林 邦英

暑い日が続きます。お体に気をつけて下さい。平方根を求める考え方の0番、①、②についての続きです。平方数の数列の階差の分析を、九九の表の「マスめ」の観察におきかえました。こちらの方が古いと思うからです。①の計算の始まりをⒶ、Ⓑ、Ⓒに分け、Ⓑの数値分析により、②の左辺の生まれたことを明らかにしました。①、②の式は重要でここから多くのことが生まれます。

2020．8．2

平方根を求める考え方 あれやこれや　①の左辺と②の左辺について

レポート（2020．7．19）では、①の左辺と②の右辺について考えました。

① 左辺　$\frac{a+b}{2} > \sqrt{a \cdot b}$　　② 右辺　$\sqrt{A^2+x} > A + \frac{x}{2A+1}$

不等号の説明の方法の部分が ④と⑤です。

④　$\sqrt{16} = 4 = \frac{3+5}{2} > \sqrt{3 \times 5} = \sqrt{15}$　という具体的な数値を使いました。
$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ が対応します。

⑤「点㋐と点㋒を直線で結ぶと点㋑の下を通ります。」としました。
作図がしやすかったからです。

⑤では数列の階差を調べました。九九の表を使うと下のようになります。

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

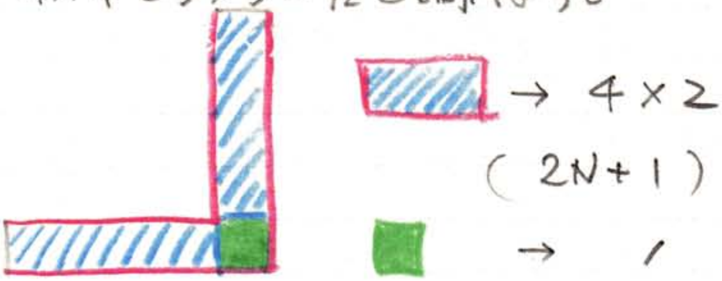
4

16

「平方」なので「面積」を調べます。

$2 \times 2 = 4$
$4 \times 4 = 16$　） 4，16は マスめの数です。

$4 \times 4$ と $5 \times 5$ の差を調べます。




①の右辺は ①の左辺より生まれます。

$\frac{a+b}{2} > \sqrt{a \cdot b} > \frac{2 \cdot a \cdot b}{a+b}$　　平方根よりも大きい数で割るので平方根よりも小さくなります。

$a > b$ として、$a$ に左辺，$b$ に右辺を代入して再び計算すると左辺と右辺の差は小さくなります。$a \cdot b$ のとり方で計算効率が変わります。$\sqrt{19}$ を例にすると　Ⓐ　$1 \times 19$　　Ⓑ　$4 \times \frac{19}{4}$　　Ⓒ　$\frac{170}{39} \times \frac{19 \times 39}{170}$

Ⓐはもっとも単純な方法です。立方根の場合の例は、レポート（2004．7．19）。立方根の求め方について、で使いました。　$(1+19) \div 2 = 10 \rightarrow 1.9$
$(10+1.9) \div 2 = 5.95 \rightarrow 3.19‥$　Ⓑよりも3回ほど計算の回数が増えます。Ⓒはあれやこれや⑤によって作ることのできる最良近似分数を使う場合です。

$170 \div 39 =$　　$ans^2 = 19.0006‥$
$2441 \div 560 =$　　$ans^2 = 19.0002‥$
精度はほとんどちがわないのに上の方が小さい数の分数で表現できる。

Ⓒに対応するのが最良区間近似式です。レポート（2008．4．6）

2020.8.2

Ⓑについて　具体的な数値を使って考えてみます。

$2^2 = 4 < 7 < 9 = 3^2$　　$3^2 = 9 < 13 < 16 = 4^2$

$7 = 2 \times \frac{7}{2}$　　$13 = 3 \times \frac{13}{3}$

$\frac{2+\frac{7}{2}}{2} = \frac{4+7}{4} = \frac{11}{4}$　　$\frac{3+\frac{13}{3}}{2} = \frac{9+13}{6} = \frac{22}{6}$

$\frac{11}{4} = 2\frac{3}{4} = 2 + \frac{3}{4}$　　$\frac{22}{6} = 3\frac{4}{6} = 3 + \frac{4}{6}$

$7 = 2^2 + 3 \rightarrow 2 + \frac{3}{4}$　$\leftarrow 7-4$, $\leftarrow 2\times2$　　$13 = 3^2 + 4 \rightarrow 3 + \frac{4}{6}$　$\leftarrow 13-9$, $\leftarrow 3\times2$

②右辺　$\sqrt{A^2+x} > A + \frac{x}{2A+1}$　と　くらべると　$\boxed{+1}$　の部分がないだけであることがわかります。

① $\frac{a+b}{2} > \sqrt{a\cdot b} > \frac{2\cdot a\cdot b}{a+b}$

② $A + \frac{x}{2A} > \sqrt{A^2+x} > A + \frac{x}{2A+1}$

①の左辺を読み直すことで
②の左辺が生まれます。
不等号がそのまま使えます。

$\sqrt{7}$　$2+\frac{3}{4} > \sqrt{2^2+3} > 2+\frac{3}{5}$　　$\sqrt{13}$　$3+\frac{4}{6} > \sqrt{3^2+4} > 3+\frac{4}{7}$

$ans^2 = 7.56\cdots$　　$ans^2 = 6.76$　　$ans^2 = 13.44\cdots$　　$ans^2 = 12.75\cdots$

② 平方根を求めたい数を平方とあまりに分けることでだいたいの大きい，小さい数値を求めることができます。これを元にして，精度を高める工夫が行なわれます。②→③

〔0〕 $\frac{a+b}{2} > \sqrt{a\cdot b}$

$\sqrt{A^2+x} > A + \frac{x}{2A+1}$

〔1〕 $\frac{a+b}{2} > \sqrt{a\cdot b} > \frac{2\cdot a\cdot b}{a+b}$　　左辺と右辺を加えると $(a\cdot b \to 1)$

$\frac{35}{8}$

$19 = 4 \times \frac{19}{4}$

$\sqrt{19}$

$19 = 4^2 + 3$

〔1'〕 $\frac{a+b+2\cdot a\cdot b}{2+a+b} \fallingdotseq \sqrt{a\cdot b}$

〔2〕 $4+\frac{3}{8}$

$A + \frac{x}{2A} > \sqrt{A^2+x} > A + \frac{x}{2A+1}$

〔3〕　左辺と右辺を使った2階だて

$\sqrt{A^2+x} \fallingdotseq A + \cfrac{x}{2A + \cfrac{x}{2A+1}}$

$(0 < x < 2A+1)$