

平方根を求める考え方あれやこれや

0番

始まり「九九の表の観察」

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

ア

自然数の平方数を赤で示しました。左上より右下へ

自然数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
平方数	1	4	9	16	25	36	49	64	81

自然数の平方数が左上より右下になります。平方数の平方根は自然数です。平方数でない数の平方根は？このような数のあることを認めることから始まります。

$\sqrt{19}$ の場合 $16 < 19 < 25$
 $19 = 4^2 + 3$ $4 < \sqrt{19} < 5$

$\sqrt{19}$ は 4 よりも大きく 5 よりも小さい数です。

$\sqrt{20}$ の場合 $4 < \sqrt{20} < 5$
 $20 = 4 \times 5$ $16 < 20 < 25$

19 との違いは $20 = 4 \times 5$ と分解することができるところです。

$19 = 4^2 + 3$ (和の形) と $20 = 4 \times 5$ (積の形) という考え方の違いは、平方根を求める考え方の違いに発展します。前者は ② の右辺 後者は ① の左辺です。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

イ

右上より左下へ数字を調べます。(青)

5-5 6-9 7-3 8-2 9-1
 =0 =2 =4 =6 =8

9 16 21 24 25 24 21 16 9
 1×9 2×8 3×7 4×6 5×5 6×4 7×3 8×2 9×1
 $1+9 = 2+8 = 3+7 = 4+6 = 5+5 = 10$

2つの数字の和はすべて10になります。2つの数字の差が大きいほど2つの数字の積は小さくなります。2つの数字が同じ場合に2つの数字積が一番大きくなります。
 ($5 \times 5 = 25$)

次に視点を改めて、2つの数字の積を一定にした場合を調べます。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

③

九九の表にある 8 と 18 を緑の線
でつないでみました。4 と 36 に丸を
つけました。数字の個数が 4 と 3 の
場合です。

左上へ行くほど 2 つの数字の和は小さくなり
ます。

2 つの数字の差が小さいほど左上に近くな
り、2 つの数字が同じとき 2 つの数字の和が
最小になることがわかります。

① の反復法は ③ の性質を利用したものです。① の左辺では 2 つの数字
の平均を求めています。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

④

平方数と右上の数字と左下の数字を四角
で囲みました。15-16-15 を使います。

$$15 = 3 \times 5 \quad 3 + 5 = 8$$

$$16 = 4 \times 4 \quad 4 + 4 = 8$$

$$15 = 5 \times 3 \quad 5 + 3 = 8$$

$$4 = \frac{3+5}{2} > \sqrt{3 \times 5} = \sqrt{15}$$

① の左辺 $\frac{a+b}{2} > \sqrt{a \cdot b}$ の不等式ができました。

$$48 = 6 \times 8 = 3 \times 4^2$$

$$63 = 7 \times 9 = 7 \times 3^2$$

$$72 = 8 \times 9 = 2 \times 6^2$$

$$\frac{6+8}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

$$\frac{7+9}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

$$\frac{8+9}{2} = \frac{17}{2}$$

$$\frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4} > \sqrt{3}$$

$$\frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3} > \sqrt{7}$$

$$\frac{17}{2 \times 6} = \frac{17}{12} = 1 + \frac{5}{12} > \sqrt{2}$$

(1.75)

(2.67)

(1.4167)

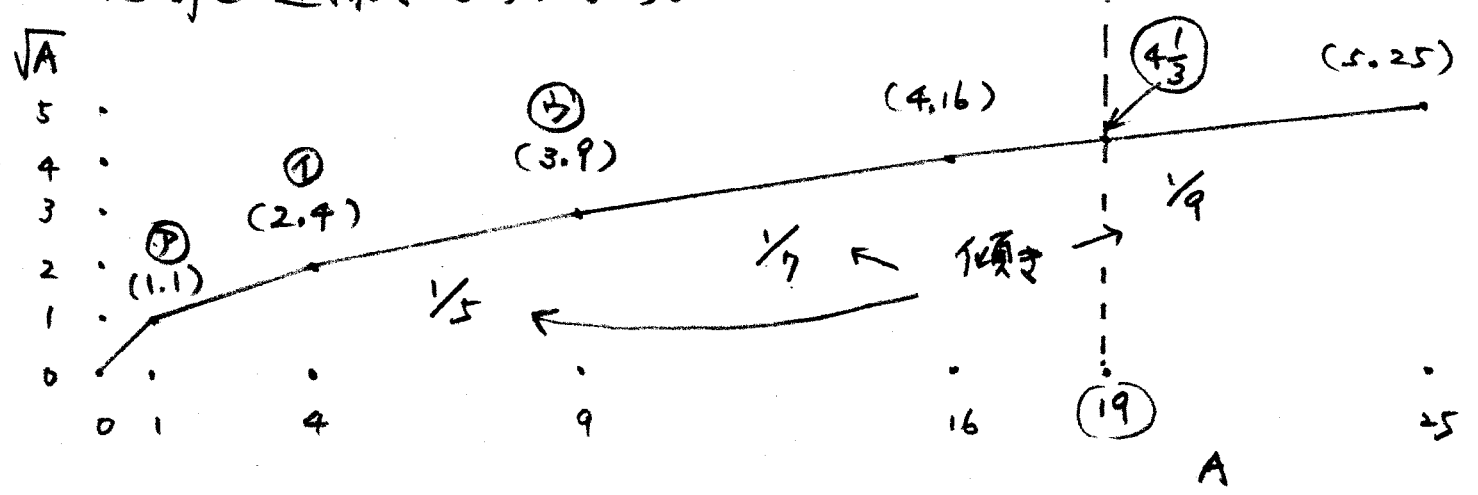
⑤ 平方数の数列を調べます。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	← N
平方数	1	4	9	16	25	36	49	64	81	
差		3	5	7	9	11	13	15	17	← 2N+1
		2	2	2	2	2	2	2	2	
		0	0	0	0	0	0	0	0	

2つのとなりあう数字の差(階差)を調べました。平方数どうしの差を $2N+1$ の式で表わすことが出来ることがわかります。この性質を利用する考え方が ②の右辺です。 $\sqrt{19}$ を例にします。

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
	↓			↓					↓	↓
+	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{9}$

区間を直線でおさめます。



$19 = 16 + 3 = 4^2 + 3$ $4 \times 2 + 1 = 9$ (ans² = 18.78)

$\sqrt{19}$ は $4 + \frac{3}{9} = 4\frac{1}{3}$

$\rightarrow \sqrt{19} > 4\frac{1}{3}$

これを説明するには?
 点③と点④を直線で結ぶと、
 点①の下を通ります。

②の右辺 $\sqrt{A^2+x} > A + \frac{x}{2A+1}$
 の不等式ができました。

〔説明〕

0番を考へることゝ ①と②の關係が線から面に広がつたように思ひます。1/N (循環小数の研究) を十進法から他の進法へと広げた時にも同じような氣持になりました。机の上の紙を垂直に立て、空間が生まれました。

①は左辺 $\frac{a+b}{2} > \sqrt{a \cdot b}$

②は右辺 $\sqrt{A^2+x} > A + \frac{x}{2A+1} \quad (0 < x < 2A+1)$

ここから始まつたと思ひます。平方根の大ききまたは小きなだいたいの數を求めぬ不等式です。この不等式は片方しかなく、不完全なものです。①の右辺と②の左辺とでは①の右辺の方が先に作られたと思ひます。反復法としての式の完成です。①の左辺より②の左辺が生まれたのは數値分析によつたと思ひますが、ここでの人の心の動きは、「だいたいでいいから簡単に數値を求めたい (速算術)」であつたと思ひます。①は2次収束するが、實用には高級すぎます。 $A + \frac{x}{2A} > \sqrt{A^2+x} > A + \frac{x}{2A+1}$ の不等式が生まれました。これは私の作つた物語です。もしよろしければ御意見をお知らせ下さい。

林 卯英