2020.7.9

武田 利一 様

平方根を求める考え方の始まりを「九九の表の観察」に
（あれやこれや ○番）
しました。レポート（2018.6.2）の九九の表を使います。

自然数の平方数は赤で示されています。（左上より右下へ）

自然数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
平方数	1	4	9	16	25	36	49	64	81

右上より左下へ数字を調べます。

9	16	21	24	25	24	21	16	9
					6−4=2	7−3=4	8−2=6	9−1=8
1×9	2×8	3×7	4×6	5×5	6×4	7×3	8×2	9×1
1+9=10	2+8=10	3+7=10	4+6=10	5+5=10				

2つの数字の和はすべて10になります。2つの数字の差が大きいほど2つの数字の積が小さくなることがわかります。2つの数字が同じ場合に（2つの数字の積が）一番大きくなります。（2つの数字の積を一定にすると）2つの数字が同じ場合に2つの数字の和が一番小さくなる

平方数ではない数の平方根は？

$\sqrt{19}$ を例にします。

$$16 < 19 < 25$$
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$4 < \sqrt{19} < 5$$

$\sqrt{19}$ は 4よりも大きく5よりも小さい数

このような数のあることを認めることから始まります。

反復法 ← くり返す

① $\frac{a+b}{2} > \sqrt{a \cdot b} > \frac{2 \cdot a \cdot b}{a+b}$ (次の計算は $a \to \frac{a+b}{2}$ $b \to \frac{2 \cdot a \cdot b}{a+b}$ として行なう)

①の方法を使って$\sqrt{19}$を求める時の計算の始まりは

㋐ $19 = 4 \times \frac{19}{4}$ (4.75) ㋑ $19 = 5 \times \frac{19}{5}$ (3.8)

を考えることができます。どちらを使っても

㋐ $\frac{4 + \frac{19}{4}}{2} > \sqrt{19}$ ㋑ $\frac{5 + \frac{19}{5}}{2} > \sqrt{19}$

$\sqrt{19}$よりも大きくなることが①の左の式です。ただし

2つの数を平均するので次の計算をする時の2つの数の差は

小さくなっています。右の式は19を平均した数で割っています。

㋐ $\frac{4 + \frac{19}{4}}{2} = \frac{16+19}{8} = \frac{35}{8}$ (4.375) $\left(\frac{35}{8}\right)^2 = 19.14\cdots$ $\frac{8 \times 19}{35} = \frac{152}{35}$ (4.34…)

㋑ $\frac{5 + \frac{19}{5}}{2} = \frac{25+19}{10} = \frac{44}{10}$ (4.4) $\left(\frac{44}{10}\right)^2 = 19.36\cdots$ $\frac{10 \times 19}{44} = \frac{190}{44}$ (4.31…)

16 — $\boxed{3}$ — 19 — $\boxed{6}$ — 25

19は25よりも16の方に近いので㋐の方が精度が良く

なります。

$19 = 16 + 3 = 4^2 + 3$ と考えるところから計算を

始める方法が②の考え方の左の式です。

㋐ $\frac{35}{8} = 4 + \frac{3}{8}$ ← $19 - 16 = 3$ ← $4 \times 2 = 8$

①の左 ②の左

② $A + \frac{x}{2A} > \sqrt{A^2 + x}$

② $A+\frac{x}{2A} > \sqrt{A^2+x} > A+\frac{x}{2A+1}$

$A^2+x = (A+a)^2 = A^2+2Aa+a^2$, $x = 2Aa+a^2$

$x = a(2A+a)$, $a=\frac{x}{2A+a}$ を無視 → $a=\frac{x}{2A}$ とするよりも 左 ①の数値分析

として考えた方が説明がきれいだと思います。レポート(2019.2.6) p.19-20

で確かめました。②の式の右は平方数の数列の階差によって

作ることができます。②の左右の式の統合は レポート(2019.10.22)

新しく式を作る時の人の心の動きは？私の知りたいところです。

「傾きの変化に着目する考え方」がきっかけになったと思います。③'

の式は ③ 右側が先に作られたと私は考えています。連分数の

始まりといってもよいと思います。①の両辺の統合によって①'を

作るに理由があったはずです。私は①の方法で作られる

$\sqrt{2}$の近似分数を使って $\frac{3+4}{2+3} = \frac{7}{5}$ となる $\frac{7}{5}$ という近似分数

に着目していました。7進法で$1\div5$と$1\div5^2$の循環節の長さがど

ちらも4桁である理由を $7^2+1=2\times5^2$ の式で説明できない

2001年の夏-秋

かと考えていたからです。41進法での$1\div29$, $1\div29^2$の計算を

することで確かなものになりました。$\frac{7}{5}$という分数には強弱以外

にも他の意味がありました。だからこそ私はこだわりました。2001年

に何人かの先生に連分数により平方根の近似分数を作ることができること

を教えていただきました。私は④の形の連分数を先に知ることができ

ました。日本で連分数と言うと普通は⑤のことです。正則連分数と言います。

⑤の連分数には周期があらわれ、数論を考える上で重要です。では④には意味がないのか考えていて、基本となる一次収束であることがわかりました。レポート(2019.2.6) P.20④ 2次収束,3次収束を先に知って1次収束に戻ってきたように思います。2次収束を1次と3次ではさみこんで考えるとよくわかると思いました。アルキメデスさんの円周率を求める方法で使う内接と外接の加重平均の実験と共通するところがあります。

(a) 内1, 外1 → 辺を2倍とした外接 (b) 内2, 外1 → 円周率

(c) 内3, 外1 → 辺を2倍とした内接　(c) < (b) < (a)

(b)を(a)と(c)ではさみこむことで実験結果が安定しました。

(C)の実験を私は何を思って行ったのかとあとになってふしぎに思います。n進法で1÷49の循環節42桁の分割和の時もそうでした。2等分,3等分,6等分では9が並びます。ところが7等分して加えると1÷7の循環節がとび出しました。実はこっちの方が重要なのではないのかと思いました。

温故知新、何度も何度も古いスープを温めると味わいが良くなるのでしょうか。私なりの発見がありました。公式の変形による証明と具体的な数値分析の両輪を知っていて良かったと思っています。

1年前の7月をふり返ります。レポート(2019.7.16) P.5 の +b b=0.00018 の見直しから始まりました。レポート(2011.9.11)は、

$$g(x) = 1 + \underline{1.8\times10^{-4}} + \frac{x}{3+x-\frac{9x^2}{59}} \cong \sqrt[3]{1+x} \quad (0<x<1)$$

この式から始まります。杉浦洋先生（南山大学）に相対誤差の最大絶対値を小さくするための定数項補正（1.8×10^{-4}）をつけ加えていただきました。レポート（2019.7.16）P.5 で $b=0$ と $b=0.00018$ の時のちがいを見くらべることができる数表を作りました。右側の方が数字のならび方がきれいです。双曲線近似法の分母2次補正＋定数項補正です。ここから始めて双曲線近似法の分母1次補正に私はたどりつきました。2次補正よりも1次補正の方が原理は単純です。精度をすてて、計算原理が簡単である方をえらびました。

レポート（2014.3.20）P.18 ③ tan88.5° を求める方法についての考え方は tan89°, tan88° を使って sin, cos の 88.5° を求め比を使って tan にするというもので、$\tan\frac{\alpha\pm\beta}{2} = \frac{\sin\alpha \pm \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$ を知るきっかけになりました。

この式を使った実験はレポート（2014.4.17）で P.34,「$8=2^3$ が現われました。」とあります。ヒッパルコスさんが小さい角度の円周を弦で近似したことを知り、どの程度の精度かを sin ではなく tan を使って確かめようとして知りました。さっそく三角比の表（0°〜1.5°）の10分ごとの表を作りました。レポート（2014.5.6）

1^2から10^2までの平方数の和は 385 で 100^2までは 338350 この数字を見て $\frac{1}{3}=0.3333\cdots$ がかくれていることを知るには循環小数の研究が必要でした。十進法を利用する係数分解法で、和の形で公式を求めることができました。$S=\frac{1}{3}N^3+\frac{1}{2}N^2+\frac{1}{6}N$ 私は数学における実験と観察（物理的方法と化学的方法）をテーマとし、おもに数表作りと数値分析をしてきました。できるだけ数学における基本的なテーマをえらびました。平方根を求める考え方あれやこれやでは基本的な考え方を私なりに整理してみました。1つにまとめることでそれぞれの関係性も見えてきました。

まとまらない内容になってしまいもうしわけありません。夏を前にして、この1年をふりかえってみました。

お体に気をつけて下さい。

林　邦英

連分数の始まり？

③ $\sqrt{A^2+x} < A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+1}}$　　$\sqrt{5^2+x} < 5+\cfrac{x}{10+\cfrac{x}{11}}$ $(0<x<11)$

26	$5+\frac{1\times11}{110+1}$	$=5+\frac{11}{111}$	$=5.099$	ans^2	26.00
27	$5+\frac{2\times11}{110+2}$	$=5+\frac{22}{112}$	$=5.196$		27.00
28		$5+\frac{33}{113}$	$=5.292$		28.01
29	$5+\frac{4\times11}{110+4}$	$=5+\frac{44}{114}$	$=5.386$		29.01
30		$5+\frac{55}{115}$	$=5.478$		30.01