2020．1．25

武田利一 様

おいそがしい日々をすごされていると思います。お体に気をつけて下さい。

平方根を求める考え方は奥の深いテーマです。1月になってまた新しい出合がありました。 $\sqrt{1.25}$ と $\sqrt{0.7}$ を例とします。

$1.25 = 5/4$ $0.7 = 7/10$ 分数に直して計算します。

$$\frac{5}{4} \xrightarrow{\times 4} \frac{20}{16} < 18 \quad \begin{matrix}+1\\-1\end{matrix} \quad \frac{19}{17} \quad \frac{19}{17} + \frac{1}{4\times2\times19\times17} \quad 5-4=1$$

(1.249…) (1.25000014…)

$$\frac{7}{10} \xrightarrow{\times 4} \frac{28}{40} < 34 \quad \begin{matrix}-3\\+3\end{matrix} \quad \frac{31}{37} \quad \frac{31}{37} - \frac{27}{10\times2\times31\times37} \quad 7-10=-3$$

(0.7019…) (0.7000013…)

計算量を考えると効率的な方法だと思いました。

⑥から⑩までを先に説明します。⑥から⑧の方法で作られた平方根の表を⑨で観察します。 $\sqrt{1+a}$ と $\sqrt{25+a}$ の数値をならべました。1.001 の数値を使って $+\ a^3/16$ の項を予想することができます。0624 の部分です。 $a=1$ の数値では 0195 の部分が対応します。そろばんと筆算の時代計算は大変です。より少ない量のデータによる分析法を求めて、工夫がなされていたと思います。 $1+a$ では桁数が多くなるので $25+a$ を使って分析し、 $1+a$ に戻したのではないかと私は思います。 $25=5^2$ $5\times2=10$ （②の左辺）となり十進法を利用する係数分解法が使えるからです。 $\frac{7}{256} = \frac{1\times3\times5\times7}{2\times4\times6\times8\times10}$ 項の規則性を知ることで次々と新しい項を作ることができるようになりました。⑩は級数展開

の各項の係数を平方根以外へと拡張しました。パスカルの三角形を見る向きを変えたに延ばすと数列を作ることができます。数列の一般項を求める効率的な方法があると便利です。[0]に着目します。N=−1の時に0になるということで(N+1)の成分があることを知ることができます。次に基準線を転換します。← $(a+b)^{0.5}$ は ↑0.5の部分になります。N=1/2です。N=1/3とすると $\sqrt[3]{1+x}$ の係数を求めることができるすぐれものです。

P.2を新しく作りました。①の両辺を加えることで①′を作ることができます。円周率を求めるアルキメデスさんの考え方も不等式です。両辺の加重平均から多くの発見が生まれました。平方根を求める考え方を調べていても同様のことを見つけることができました。②の不等式を完成させるために右辺をつけ加えました。②の両辺を使って③の式が生まれます。不等式を完成させるために左辺をつけ加えます。③′ ③の左辺は④の始まりとなります。③′の左辺をA=1とすると①′の式と同じになります。$\boxed{}$の中は簡易計算法です。③′とすることで精度は良くなりますが、連分数を分数に直す計算方法が必要となります。④では左辺だけを使った等号の式に変化しています。$\sqrt{2}$ と $\sqrt{7}$ を使って説明しました。ラファエル・ボンベリさん Rafael Bombelli (1526−1572) の研究です。⑤の始まりは⑥〜⑧の方法で得た数値を分数に直すところからだと思います。　林　邦英

平方根を求める考え方 あれやこれや

① $\dfrac{a+b}{2} > \sqrt{a\cdot b} > \dfrac{2\cdot a\cdot b}{a+b}$　　$\dfrac{4+\frac{19}{4}}{2} = \dfrac{35}{8}$　　$\dfrac{\frac{35}{8}+\frac{19\times 8}{35}}{2} = \dfrac{2441}{560}$

⇓ $\left(\dfrac{35}{8} = 4+\dfrac{3}{8}\right)$　　$19 = 4\times\dfrac{19}{4}$　　$19 = 4^2+3$

$4^2 - 19\times 1^2 = -3$

$35^2 - 19\times 8^2 = 9$

$2441^2 - 19\times 560^2 = 81$

⇓

② $A + \dfrac{x}{2A} > \sqrt{A^2+x} > A + \dfrac{x}{2A+1}$

A	1	2	3	4	5
	1	4	9	16	25
2A+1	3	5	7	9	

$\left(4+\dfrac{3}{8}\right)^2 = 19.14$　　$\left(4+\dfrac{3}{9}\right)^2 = 18.78$

$4+\dfrac{x}{8+\frac{x}{9}}$　　$16 < 4^2+x < 25$　　$0 < x < 9$

③ $\sqrt{A^2+x} < A + \dfrac{x}{2A+\frac{x}{2A+1}}$

$6+\dfrac{x}{12+\frac{x}{13}}$　　$36 < 6^2+x < 49$　　$0 < x < 13$

$4+\dfrac{3}{8+\frac{3}{9}} = \dfrac{109}{25}$　　$\left(\dfrac{109}{25}\right)^2 = 19.01$

④ $\sqrt{A^2+x} = A + \cfrac{x}{2A + \cfrac{x}{2A + \cfrac{x}{2A+}}}$

$\sqrt{1+x} \fallingdotseq 1 + \dfrac{x}{2+\frac{x}{2}} = 1 + \dfrac{2x}{4+x}$

双曲線近似法

$\dfrac{4}{1} \to 4 + \cfrac{3}{8+\cfrac{3}{8+\cfrac{3}{8+\cfrac{3}{8+}}}}$

$\dfrac{35}{8}$　$\dfrac{292}{67}$　$\dfrac{2441}{560}$　$\dfrac{20404}{4681}$

$292^2 - 19\times 67^2 = -27$

$20404^2 - 19\times 4681^2 = -243$

最良近似分数

⑤ $\sqrt{19} \fallingdotseq \dfrac{170}{39}$　　$170^2 - 19\times 39^2 = 1$　　$57799^2 - 19\times 13260^2 = 1$

$\dfrac{\frac{170}{39}+\frac{19\times 39}{170}}{2} = \dfrac{57799}{13260}$

$\sqrt{19} = 4 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{2+}}}}}}}$

$\dfrac{9}{2} \to 2 +$　$\dfrac{13}{3} \to 1 +$　$\dfrac{48}{11} \to 3 +$　$\dfrac{61}{14} \to 1 +$　$\dfrac{170}{39} \to 2 +$

$9^2 - 19\times 2^2 = 5$

$13^2 - 19\times 3^2 = -2$

$48^2 - 19\times 11^2 = 5$

$61^2 - 19\times 14^2 = -3$

4　2　1　3　1　2　8

$4\times 2 = 8$

① $\dfrac{a+b}{2} \quad \sqrt{a\cdot b} > \dfrac{2\cdot a\cdot b}{a+b}$ 両辺を加える ①' $\dfrac{a+b+2\cdot a\cdot b}{2+a+b} < \sqrt{a\cdot b}$

$(a\cdot b \to 1)$

$$\frac{21}{20} = \frac{\frac{10}{10}+\frac{11}{10}}{2} > \sqrt{\frac{10}{10}\cdot\frac{11}{10}} > \frac{20\cdot 11}{21\cdot 10} = \frac{22}{21} \qquad \frac{a+b+2\cdot 1}{2+a+b} = 1 = \sqrt{1}$$

$$\frac{21+22}{20+21} = \frac{43}{41} = 1+\frac{2}{41}$$

$$\sqrt{1+0.1} > 1+\frac{2\times 0.1}{4+0.1} = 1+\frac{2}{41}$$

$$\sqrt{1+x} > 1+\frac{2x}{4+x} = 1+\frac{x}{2+\frac{x}{2}}$$

③'

$$A+\frac{x}{2A+\frac{x}{2A}} < \sqrt{A^2+x} < A+\frac{x}{2A+\frac{x}{2A+1}}$$

$\times 4$

$\dfrac{11}{10} \quad \dfrac{44}{40} < \begin{matrix}+1\\-1\end{matrix} \quad \dfrac{43}{41} \qquad 11-10=1$

$$\frac{43}{41} + \frac{1}{10\times 2\times 43\times 41}$$

$\times 4$

$\dfrac{13}{10} \quad \dfrac{52}{40} < 46 \begin{matrix}+3\\-3\end{matrix} \quad \dfrac{49}{43} \qquad 13-10=3$

$$\frac{49}{43} + \frac{27}{10\times 2\times 49\times 43} \qquad 3^3=27$$

③''

$$A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A}}} > \sqrt{A^2+x} > A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+1}}}$$

$$\sqrt{19} = \sqrt{4^2+3}$$

3/8   3/8   3/8 (19.0002‥)   3/9 (18.9995‥)

$\dfrac{1}{0} \quad \dfrac{4}{1} \quad \begin{matrix}3+32=35\\0+8=8\end{matrix} \quad \dfrac{12+280}{3+64} = \dfrac{292}{67} \quad \dfrac{105+2336}{24+536} = \dfrac{2441}{560} \quad \dfrac{105+2628}{24+603} = \dfrac{2733}{627}$

④

$$\sqrt{A^2+x} = A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cdots}}}}}}$$

$$\sqrt{2} = 1+\sqrt{2}-1$$
$$= 1+\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1}$$
$$= 1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$
$$= 1+\frac{1}{2+\sqrt{2}-1}$$

$$\sqrt{7} = 2+\sqrt{7}-2$$
$$= 2+\frac{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}{\sqrt{7}+2}$$
$$= 2+\frac{3}{\sqrt{7}+2}$$
$$= 2+\frac{3}{4+\sqrt{7}-2}$$

1 桁ずつ求める考え方

⑥

1	1	41	16-	431	185-	4351	1893-
2	4	42	17-	432	186-	4352	1893-
3	9	43	18- ←	433	187-	4353	1894-
4	16 ←	44	19-	434	188-	4354	1895-
5	25			435	189- ←	4355	1896-
				436	190-	4356	1897-
						4357	1898-
						4358	1899- ←
						4359	1900-

$\sqrt{19} = 4.358\cdots$

⑦ 開平法

4		4 . 3 5 8 8
+4	4×4	19
83		−16
+3	83×3	300
865		−249
+5	865×5	5100
8708		−4325
+8	8708×8	77500
87168		−69664
+8	87168×8	783600
87176		−697344
		86256

⑧ $19 - 4^2 = 3$ めのこ算

4

300
① − 81 = 219
② − 83 = 136
③ − 85 = 51

43

5100
① − 861 = 4239
② − 863 = 3376
③ − 865 = 2511
④ − 867 = 1644
⑤ − 869 = 775

435

77500
① − 8701 = 68799
② − 8703 = 60096
③ − 8705 = 51391
④ − 8707 = 42684
⑤ − 8709

4358

33975
⑥ − 8711 = 25264
⑦ − 8713 = 16551
⑧ − 8715 = 7836

⑨ 平方根の表の観察

$\sqrt{1+a}$ の場合

	$+\frac{1}{2}$ $\downarrow$ $-\frac{1}{8}$ $\downarrow$
1.01	1.0049875621 2089
1.001	1.000499875062461
1.0001	1.000049998750062

$\sqrt{25+a}$

		㋐	㋑	㋒	㋓	㋔	
$a=1$	5.	09	9	01	95	13	59
$a=2$	5.	19	6	15	24	22	70
$a=3$	5.	29	1	50	26	22	12

㋐)	1	2	3	$\times 10^{-1}$	
㋑)	-1	-4	-9	$\times 10^{-3}$	$-1^2 \quad -2^2 \quad -3^2$
㋒)	2			$\times 10^{-5}$	$2\times1^3 \quad 2\times2^3=16 \quad 2\times3^3=54$
㋓)	-5			$\times 10^{-7}$	-5×1^4
㋔)	14			$\times 10^{-9}$	14×1^5

$$\sqrt{5^2+a} = 5 + \frac{a}{10} - \frac{a^2}{10^3} + \frac{2a^3}{10^5} - \frac{5a^4}{10^7} + \frac{14a^5}{10^9} -$$

$$= 5 + \frac{a}{2\cdot5} - \frac{a^2}{2^3\cdot5^3} + \frac{2a^3}{2^5\cdot5^5} - \frac{5a^4}{2^7\cdot5^7} + \frac{14a^5}{2^9\cdot5^9} -$$

$\sqrt{5^2+a}$ を $\sqrt{1+a}$ に変えると

$$\sqrt{1+a} = 1 + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{2^3} + \frac{2a^3}{2^5} - \frac{5a^4}{2^7} + \frac{14a^5}{2^9} -$$

$$= 1 + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{8} + \frac{a^3}{16} - \frac{5a^4}{128} + \frac{7a^5}{256} -$$

$$-\frac{1}{8} = -\frac{1}{2\times4} \qquad \frac{1}{16} = \frac{1}{2\times4\times2} = \frac{1\times3}{2\times4\times6}$$

$$-\frac{5}{128} = -\frac{5}{2\times4\times2\times8} = -\frac{1\times3\times5}{2\times4\times6\times8}$$

$$\frac{7}{256} = \frac{7}{2\times4\times\underset{(\times3)\downarrow6}{2}\times8\times\underset{(\times5)\downarrow10}{2}} = \frac{1\times3\times5\times7}{2\times4\times6\times8\times10}$$

⑩ パスカルの三角形の行間を読む

A

B　1　← $(a+b)^{0.5}$

C　1　1

D　1　2　1

E　1　3　3　1

1　4　6　4　1

1　5　10　10　5　1

$(a+b)^0$　の係数

$(a+b)^1$

$(a+b)^2$

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a+b)^4$

$(a+b)^5$

左へ延ばすと

(N)	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	
A	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
B	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	N
C	6	3	1	0	0	1	3	6	10	15	$\frac{1}{2}N(N+1)$
D	-4	-1	0	0	0	1	4	10	20	35	$\frac{1}{6}N(N+1)(N+2)$
E	1	0	0	0	0	1	5	15	35	70	$\frac{1}{24}N(N+1)(N+2)(N+3)$

[0]を使うと(N+3)(N+2)(N+1)　(N)の成分のあることがわかる。

基準線の転換

(N)	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	
A	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
B	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	N
C	10	6	3	1	0	0	1	3	6	10	$\frac{1}{2}N(N-1)$
D	-20	-10	-4	-1	0	0	0	1	4	10	$\frac{1}{6}N(N-1)(N-2)$
E	35	15	5	1	0	0	0	0	1	5	$\frac{1}{24}N(N-1)(N-2)(N-3)$
F	-56	-21	-6	-1	0	0	0	0	0	1	$\frac{1}{120}N(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)$

↑ 0.5

$120 = 1\times2\times3\times4\times5$

$N = 1/2$

$A = 1$　$B = 1/2$　$C = -1/8$　$D = 1/16$　$E = -5/128$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 +$$

$N = 1/3$　$A = 1$　$B = 1/3$　$C = -1/9$　$D = 5/81$　$E = -10/243$

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4 +$$