2019.12.3

武田　利一　様

寒くなりました。おいそがしい日々をすごされていると思います。お体に気をつけて下さい。平方根を求める考え方を整理しました。双曲線近似法－分母1次補正を③にしました。$A+\frac{x}{2A+\frac{x}{2A}} < \sqrt{A^2+x} < A+\frac{x}{2A+\frac{x}{2A+1}}$ $(0<x)$

もしよろしければ御意見をお知らせ下さい。①から⑧までは2019年なので$\sqrt{19}$を求めました。①から⑤までは分数で表現しました。

①では $4^2=16<19<25=5^2$ なので $4\times\frac{19}{4}$ から計算を始めました。考え方は平均です。②では $19=4^2+3$ に $\sqrt{\ }$ の中が変化しています。

$4+\frac{3}{2\times4}=4\frac{3}{8}$ と計算は単純になりました。速算術だと思いました。右辺の+1は「差」によって説明できます。左辺は微分 右辺は差分と見ることもできます。

③は②の左辺と右辺を融合したものです。xの変化により傾きが変化するので分母を補正しました。$x=0$ $4\to16$ $x=9$ $5\to25$ となるようにしましたが と中では真数よりも大きくなります。④は＝にするための無限に続く式の形です。①の計算によって作られる分数と共通点があります。

$(分子)^2-19\times(分母)^2$ の数値は近似分数を調べる上で役に立ちます。

双曲線近似法の元になる式は $X^{\frac{1}{N}}\fallingdotseq\frac{(N+1)X+(N-1)}{(N-1)X+(N+1)}$ $X^{\frac{1}{2}}\fallingdotseq\frac{3X+1}{X+3}$

$X^{\frac{1}{3}}\fallingdotseq\frac{4X+2}{2X+4}=\frac{2X+1}{X+2}$ $\sqrt[3]{1+x}\fallingdotseq1+\frac{x}{3+x}$ になります。

④は振動しますが⑤では循環します。④ $\overset{\times(-3)}{-3,\ 9,\ -27\ \ 81\ \ -243}$

⑤ $-3,\ 5,\ -2\ \ 5\ \ -3$ $\frac{170}{39}$ ① $-3\ \ 5\ \ -2\ \ 5\ \ -3$ ① $\frac{57799}{13260}$

最良近似分数とは$(分子)^2-19\times(分母)^2=①$となる分数のことです。

① $\left(\frac{170}{39}\right)^2=19.000657$ 　⑧① $\left(\frac{2441}{560}\right)^2=19.000258$ 私は左を使います。

⑥から⑧は1桁ずつ求める考え方です。⑥は、1つづつ平方をします。計算結果をすてずに活用する考え方が⑦です。主計算と副計算に分割して行います。$83\times3=249$が300から引ける最大値ですが、81×1 82×2 83×3 84×4からさがし出すのが大変な場合は⑧の計算でも求めることができます。何回引くことができるのかに計算はおきかえられました。⑥と⑦と⑧の計算の考え方のちがいについて考えてみるのもおもしろそうだと思います。

⑨と⑩は平方根を多項式の和(級数展開)で求めます。

⑨で $\frac{7}{256}=\frac{1\times3\times5\times7}{2\times4\times6\times8\times10}$ と変形することで、係数の規則性が見えてきました。目的に応じて倍分(約分の逆)する必要を考えさせられました。⑩はニュートンさんの考え方です。平方根だけではなく立方根の場合も求めることができます。

$\sqrt{1.7}=\sqrt{1+0.7}=1.3008\cdots\ (1.6921)$

$\sqrt[3]{1.7}=\sqrt[3]{1+0.7}=1.190181\cdots\ (1.6859)$

着目点がすばらしいと思いました。

林　邦英

平方根を求める考え方 あれやこれや

① $\frac{a+b}{2} > \sqrt{a\cdot b} > \frac{2\cdot a\cdot b}{a+b}$ $\qquad \frac{4+\frac{19}{4}}{2} = \frac{35}{8} \qquad \frac{\frac{35}{8}+\frac{19\times 8}{35}}{2} = \frac{2441}{560}$

$\left(\frac{35}{8} = 4+\frac{3}{8}\right)$

$19 = 4\times\frac{19}{4}$

$19 = 4^2+3$

$4^2 - 19\times 1^2 = -3$

$35^2 - 19\times 8^2 = 9$

$2441^2 - 19\times 560^2 = 81$

$\Downarrow$

② $A+\frac{x}{2A} > \sqrt{A^2+x} > A+\frac{x}{2A+1}$

A	1	2	3	4	5
	1	4	9	16	25
2A+1	3	5	7	9	

$\left(4+\frac{3}{8}\right)^2 = 19.14 \qquad \left(4+\frac{3}{9}\right)^2 = 18.78$

③ $\sqrt{A^2+x} < A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+1}}$

$4+\cfrac{x}{8+\cfrac{x}{9}} \qquad 16 < 4^2+x < 25 \qquad 0 < x < 9$

$6+\cfrac{x}{12+\cfrac{x}{13}} \qquad 36 < 6^2+x < 49 \qquad 0 < x < 13$

$4+\cfrac{3}{8+\cfrac{3}{9}} = \frac{109}{25} \qquad \left(\frac{109}{25}\right)^2 = 19.01$

④ $\sqrt{A^2+x} = A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+\cfrac{x}{2A+}}}$

$\sqrt{1+x} \fallingdotseq 1+\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{2}} = 1+\frac{2x}{4+x}$

双曲線近似法

$\frac{4}{1} \to 4+\cfrac{3}{8+\cfrac{3}{8+\cfrac{3}{8+\cfrac{3}{8+}}}}$

$\frac{35}{8} \qquad \frac{292}{67} \qquad \frac{2441}{560} \qquad \frac{20404}{4681}$

$292^2 - 19\times 67^2 = -27$

$20404^2 - 19\times 4681^2 = -243$

最良近似分数

⑤ $\sqrt{19} \fallingdotseq \frac{170}{39}$

$170^2 - 19\times 39^2 = 1$

$57799^2 - 19\times 13260^2 = 1$

$\frac{\frac{170}{39}+\frac{19\times 39}{170}}{2} = \frac{57799}{13260}$

$\sqrt{19} = 4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{2+}}}}}}}$

$\frac{9}{2} \qquad \frac{13}{3} \qquad \frac{48}{11} \qquad \frac{61}{14} \qquad \frac{170}{39}$

$9^2 - 19\times 2^2 = 5$

$13^2 - 19\times 3^2 = -2$

$48^2 - 19\times 11^2 = 5$

$61^2 - 19\times 14^2 = -3$

4 2 1 3 1 2 8

$4\times 2 = 8$

1 桁ずつ求める考え方

⑥

1	1	41	16-	431	185-	4351	1893-
2	4	42	17-	432	186-	4352	1893-
3	9	43	18- ←	433	187-	4353	1894-
4	16 ←	44	19-	434	188-	4354	1895-
5	25			435	189- ←	4355	1896-
				436	190-	4356	1897-
						4357	1898-
						4358	1899- ←
						4359	1900-

$\sqrt{19} = 4.358\cdots$

⑦ 開平法

4		4 . 3 5 8 8
+4	4×4	19
83		−16
+3	83×3	300
865		−249
+5	865×5	5100
8708		−4325
+8	8708×8	77500
87168		−69664
+8	87168×8	783600
87176		−697344
		86256

⑧ $19 - 4^2 = 3$ めのこ算

4

300
① − 81 = 219
② − 83 = 136
③ − 85 = 51

43

5100
① − 861 = 4239
② − 863 = 3376
③ − 865 = 2511
④ − 867 = 1644
⑤ − 869 = 775

435

77500
① − 8701 = 68799
② − 8703 = 60096
③ − 8705 = 51391
④ − 8707 = 42684
⑤ − 8709

4358

33975
⑥ − 8711 = 25264
⑦ − 8713 = 16551
⑧ − 8715 = 7836

⑨ $\sqrt{25+a}$ の表の観察

$26 = 25+1$	5.	0	9	9	01	95	13	59
$27 = 25+2$	5.	1	9	6	15	24	22	70
$28 = 25+3$	5.	2	9	1	50	26	22	12
				↑ ア	↑ イ	↑ ウ	↑ エ	↑ オ

ア	1, 2, 3	$\times 10^{-1}$	
イ	$-1, -4, -9$	$\times 10^{-3}$	$-1^2 \quad -2^2 \quad -3^2$
ウ	2	$\times 10^{-5}$	$2\times 1^3 \quad 2\times 2^3=16 \quad 2\times 3^3=54$
エ	-5	$\times 10^{-7}$	-5×1^4
オ	14	$\times 10^{-9}$	14×1^5

$$\sqrt{5^2+a} = 5+\frac{a}{10}-\frac{a^2}{10^3}+\frac{2a^3}{10^5}-\frac{5a^4}{10^7}+\frac{14a^5}{10^9}-$$
$$= 5+\frac{a}{2\cdot 5}-\frac{a^2}{2^3\cdot 5^3}+\frac{2a^3}{2^5\cdot 5^5}-\frac{5a^4}{2^7\cdot 5^7}+\frac{14a^5}{2^9\cdot 5^9}-$$

$\sqrt{5^2+a}$ を $\sqrt{1+a}$ に変えると．

$$\sqrt{1+a} = 1+\frac{a}{2}-\frac{a^2}{2^3}+\frac{2a^3}{2^5}-\frac{5a^4}{2^7}+\frac{14a^5}{2^9}-$$
$$= 1+\frac{a}{2}-\frac{a^2}{8}+\frac{a^3}{16}-\frac{5a^4}{128}+\frac{7a^5}{256}-$$

$$-\frac{1}{8} = -\frac{1}{2\times 4}$$
$$\frac{1}{16} = \frac{1}{2\times 4\times 2} = \frac{1\times 3}{2\times 4\times 6}$$
$$-\frac{5}{128} = -\frac{5}{2\times 4\times 2\times 8} = \frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6\times 8}$$
$$\frac{7}{256} = \frac{7}{2\times 4\times \underset{\substack{\downarrow\,(\times 3)\\ 6}}{2}\times 8\times \underset{\substack{\downarrow\,(\times 5)\\ 10}}{2}} = \frac{1\times 3\times 5\times 7}{2\times 4\times 6\times 8\times 10}$$

⑩ パスカルの三角形の行間を読む

A 1 ← $(a+b)^{0.5}$ 　　 $(a+b)^0$ の係数

B 1 1 　　 $(a+b)^1$

C 1 2 1 　　 $(a+b)^2$

D 1 3 3 1 　　 $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

E 1 4 6 4 1 　　 $(a+b)^4$

F 1 5 10 10 5 1 　　 $(a+b)^5$

N	①	②	③	④	⑤	⑥	
A	1	1	1	1	1	1	1
B	1	2	3	4	5	6	N
C	1	3	6	10	15	21	$\frac{1}{2}N(N-1)$
D	1	4	10	20	35	56	$\frac{1}{6}N(N-1)(N-2)$
E	1	5	15	35	70	126	$\frac{1}{24}N(N-1)(N-2)(N-3)$
F	1	6	21	56	126	252	$\frac{1}{120}N(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)$
G	1	7	28	84	210	462	

$N = 1/2$ とすると

A 1 　 B $1/2$ 　 C $-1/8$ 　 D $1/16$ 　 E $-5/128$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 +$$

$N = 1/3$ とすると

A 1 　 B $1/3$ 　 C $-1/9$ 　 D $5/81$ 　 E $-10/243$

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4 +$$

$$\sqrt[3]{1.1} = \sqrt[3]{1+0.1} = 1.03227983\cdots\cdots \quad (1.0999991)$$

$$\sqrt[3]{1.2} = \sqrt[3]{1+0.2} = 1.0626502\cdots\cdots \quad (1.199971)$$