No.
Date

No.
Date ・28

〔あとがき〕

数学というと土台がしっかりしていてそこから1つ1つ積み上げてゆくものという考え方が支配的ですが、実際には経験と思いつきの学問ではないかと思っています。

いいかげん答えがわかっていて、それをきちんと説明したものを読んでると それが数学かなと思ってしまいがちですが、そのあたり ちょっと疑問として残しておきたいと思います。

数学でとりあつかう数について、興味をもっていただけたら このノートはうまく書けたなと思います。

私は多くのデータをあつめ、そこに何か共通するもの、一般化できそうなものがみつかると、次に何でそうなるのかなと考えます。そして、これはこうなんだという自分なりの理由がわかるととても頭がすっきりします。このノートの中でもそのことに注意しながら書きました。

またわからないものについてはわからないものとして残しました。もっとうまい説明がありましたらおしえて下さい。

2000、x、13

# 接線法・割線法の改良 − 基本的な4つの考え方

① 中間点の数値を利用する考え方 − $y=1+0.414x$ の改良

$\sqrt{1}$ $\sqrt{1.5}$ $\sqrt{2}$ の数値を使います。2次式になります。

$$y = -0.070552x^2 + 0.484766x + 1$$

$\sqrt{1}$ $\sqrt{1.25}$ $\sqrt{1.5}$ $\sqrt{1.75}$ $\sqrt{2}$ の数値を使うと4次式になります。

最大誤差を小さくするために等間隔の数値を使わない改良されたものがあります。

② 誤差を打ち消す項をつけ加える考え方 − $y=1+0.5x$ の改良

$$y = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{35}x^2 - 0.002$$

$(\sqrt{2}-1.5)$　$x^{1+1}=x^2$　全体として数値は真数より大きくなるので補正

テイラー展開法により、高次式を簡単に作ることができる。

③ 傾きの変化に着目する考え方 − 2本の1次式の統一

$$y = 1 + \frac{x}{2 + \frac{70}{169}x} - 0.0008$$

〰〰 をつけ加える。

$x=0 \to \frac{0}{2}$

$x=0.5 \to 0.2265$

$x=1 \to \frac{169}{408}$

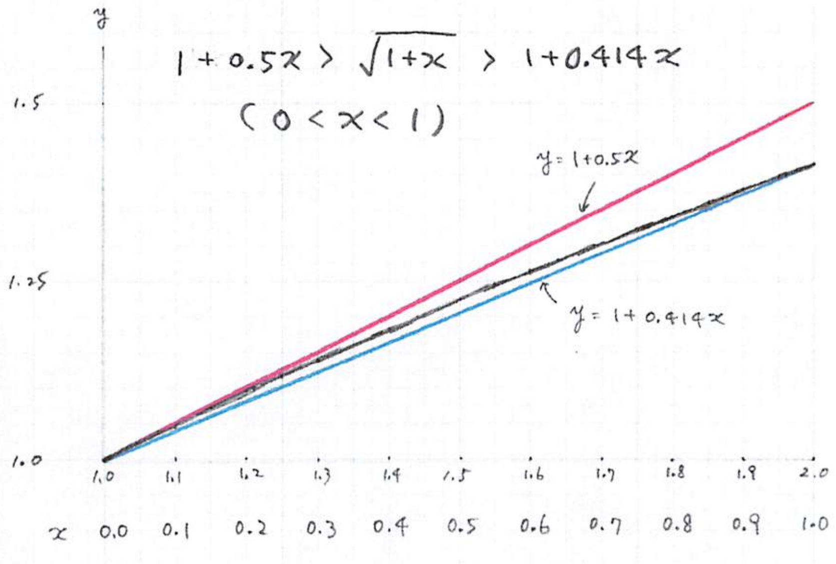
双曲線近似法 − 分母1次補正 + 定数項補正

双曲線近似法はハレーすい星を発見したハレーさんの方法で反復法として使うと3次収束します。基本となる式は、

$$X^{\frac{1}{N}} \fallingdotseq \frac{(N+1)X + (N-1)}{(N-1)X + (N+1)}$$

$X=1$ の一点近似式で $N$ が自然数でなくても使えます。　$N$ に2を代入すると、

平方根 ($\sqrt{1} \to \sqrt{2}$)




$$X^{\frac{1}{2}} \fallingdotseq \frac{3X+1}{X+3} \Rightarrow \sqrt{1+x} \fallingdotseq 1 + \frac{2x}{4+x}$$

$\sqrt{2}$ は、1.4 となります。精度は良くなりますが、計算量は、ニュートン法(2次収束)と同じです。

④ 誤差を制御する考え方 − 計算の効率化

2002年に二宮市三先生に、ハレー法といっしょに教えていただきました。「数値計算のわざ」(共立出版 P.3 P.7)で紹介されています。考え方を知るためには、最良1次近似式を作ることだと思いました。応用数学者 Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821−1894) (ロシア Okatovo生まれ) さんが考えた方法です。①の改良は「数値計算のつぼ」(共立出版)の第4章に書かれています。チェビシェフ多項式といいます。

0.0004 → 最大絶対誤差を最小にする分子分母1次の近似式を南山大学の杉浦洋先生に教えていただきました。

$$\frac{1.00038 + 0.67932x}{1 + 0.18805x}$$

2019.10.2

# 中間点の数値を利用する考え方

## 2次式の作り方

| | | | 階差1($N^1$) | 階差2($N^2$) |
|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{1}$ | 0 / 0 | 1.000000 | | |
| | | | 0.224745 | |
| $\sqrt{1.5}$ | 1 / 0.5 | 1.224745 | | −0.035276 |
| | | | 0.189469 | |
| $\sqrt{2}$ | 2 / 1 | 1.414214 | | |

| | |
|---|---|
| 0.224745 | −0.035276 |
| $N^2$(1,2)×(−0.017638)を引く | |
| 0.242383 | 0 |
| $N^1$(1)×(0.242383)を引く | |
| 0 | 0 |

$$-0.017638N^2+0.242383N^1+1$$

Nに2xを代入する

$$-0.070552x^2+0.484766x+1$$

| $x$ | $ans^2$ | $ans^2/(1+x)$ |
|---|---|---|
| 0.0 | 1.000000 | 1.000000 |
| 0.1 | 1.097824 | 0.998022 |
| 0.2 | 1.197123 | (1.002404) 0.997602 |
| 0.3 | 1.297504 | 0.998080 |
| 0.4 | 1.398586 | 0.998990 |
| 0.5 | 1.500000 | 1.000000 |
| 0.6 | 1.601391 | 1.000870 |
| 0.7 | 1.702414 | 1.001420 |
| 0.8 | 1.802735 | 1.001519 |
| 0.9 | 1.902033 | 1.001070 |
| 1.0 | 2.000001 | 1.000000 |

比の作り方

1 $N^1$

1 1

(×1)(×2)

1 2 $N^2$

1 3 2

(×1) (×2) (×3)

1 6 6 $N^3$

1 7 12 6

(×1) (×2) (×3) (×4)

1 14 36 24 $N^4$

1 15 50 60 24

(×1)(×2)(×3)(×4) (×5)

1 30 150 240 120 $N^5$

## 4次式の作り方

| | | | $N^1$ | $N^2$ | $N^3$ | $N^4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 / 0 | $\sqrt{1}$ | 1.00000000 | 0.11803399 | −0.01132311 | 0.00274302 | −0.00095582 |
| | | | $-N^4$(1,14,36,24)×(−0.00003983) | | | |
| 1 / 0.25 | $\sqrt{1.25}$ | 1.11803390 | 0.11807382 | −0.01076549 | 0.00417690 | 0 |
| | | | $-N^3$(1,6,6)×(0.00069615) | | | |
| 2 / 0.5 | $\sqrt{1.5}$ | 1.22474487 | 0.11737767 | −0.01494239 | 0 | 0 |
| | | | $-N^2$(1,2)×(−0.00747120) | | | |
| 3 / 0.75 | $\sqrt{1.75}$ | 1.32287566 | $N^1$ 0.12484887 | 0 | 0 | 0 |
| 4 / 1 | $\sqrt{2}$ | 1.41421356 | | | | |

$$-0.00003983N^4+0.00069615N^3-0.00747120N^2+0.12484887N^1+1$$

Nに4xを代入する

$$-0.01019648x^4+0.04455360x^3-0.11953920x^2+0.49939548x+1$$

## 誤差を打ち消す項をつけ加える考え方

$x=1$の時の誤差を使い係数を決定する。項の次数は(+1)とする。

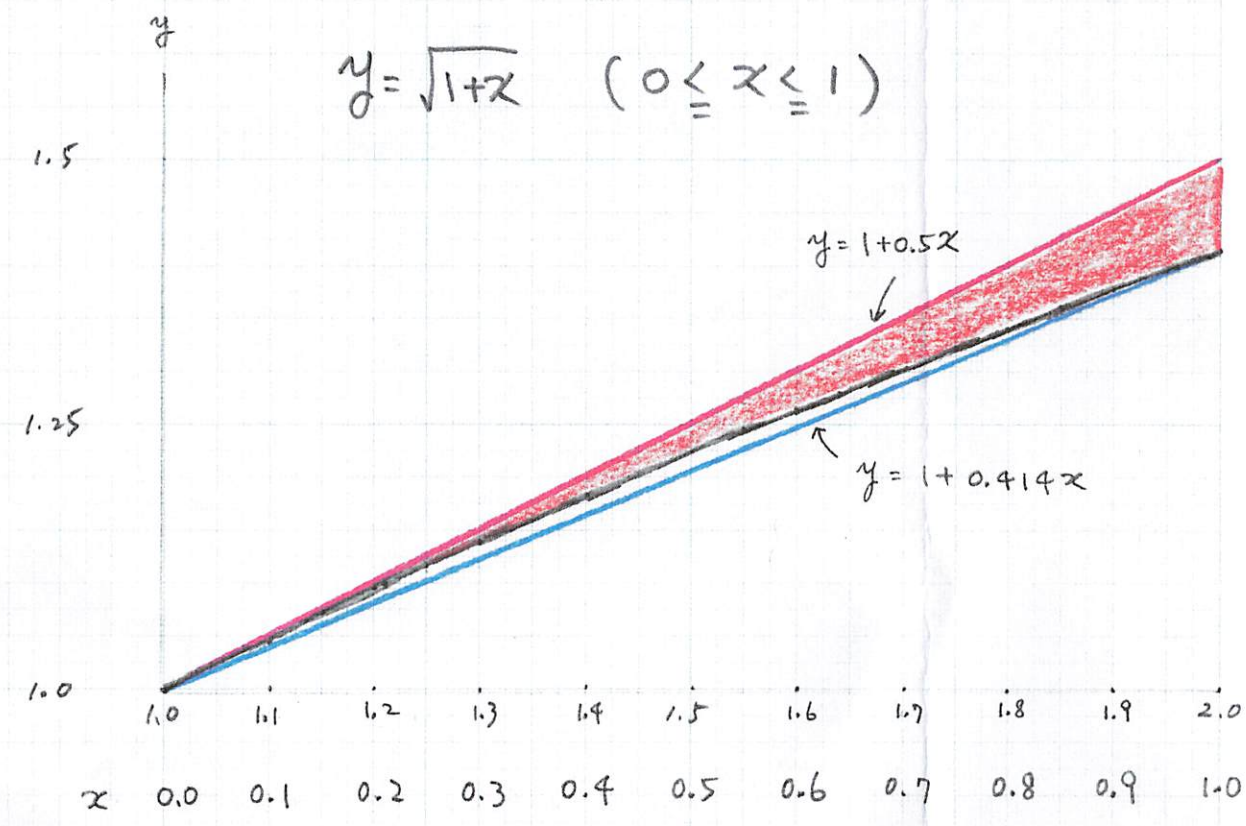
$1.5-\sqrt{2}=0.085786$

$1 \div ans = 11.65685$

$ans \times 3 = 34.97056$

$\frac{3}{35}$

平方根 ( $\sqrt{1} \to \sqrt{2}$ )




$$y=1+\frac{1}{2}x-\frac{3}{35}x^2$$

| $x$ | $ans^2$ |
|---|---|
| 0.0 | 1 |
| 0.1 | 1.101 |
| 0.2 | 1.202 |
| 0.3 | 1.305 |
| 0.4 | 1.407 |
| 0.5 | 1.509 |
| 0.6 | 1.611 ← 相対誤差が最大 |
| 0.7 | 1.711 |
| 0.8 | 1.809 |
| 0.9 | 1.906 |
| 1.0 | 2.000 |

$$y=1+\frac{1}{2}x-\frac{3}{35}x^2-0.002$$

$x=0.0$ 0.996004 (1.00401)

$x=0.6$ 1.605651 (1.00353)

3次補正式

$$y=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{2}{51}x^3+0.0007$$

5次補正式

$$y=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\frac{5}{317}x^5+0.0002$$

## 傾きの変化に着目する考え方

$x=0$の時の傾きは $0.5$

$x=1$の時の傾きは $\sqrt{2}-1$

となるように分母を変形する。

$$y = 1 + \frac{x}{2+ax}$$

$\sqrt{2} \fallingdotseq \frac{577}{408}$とする。

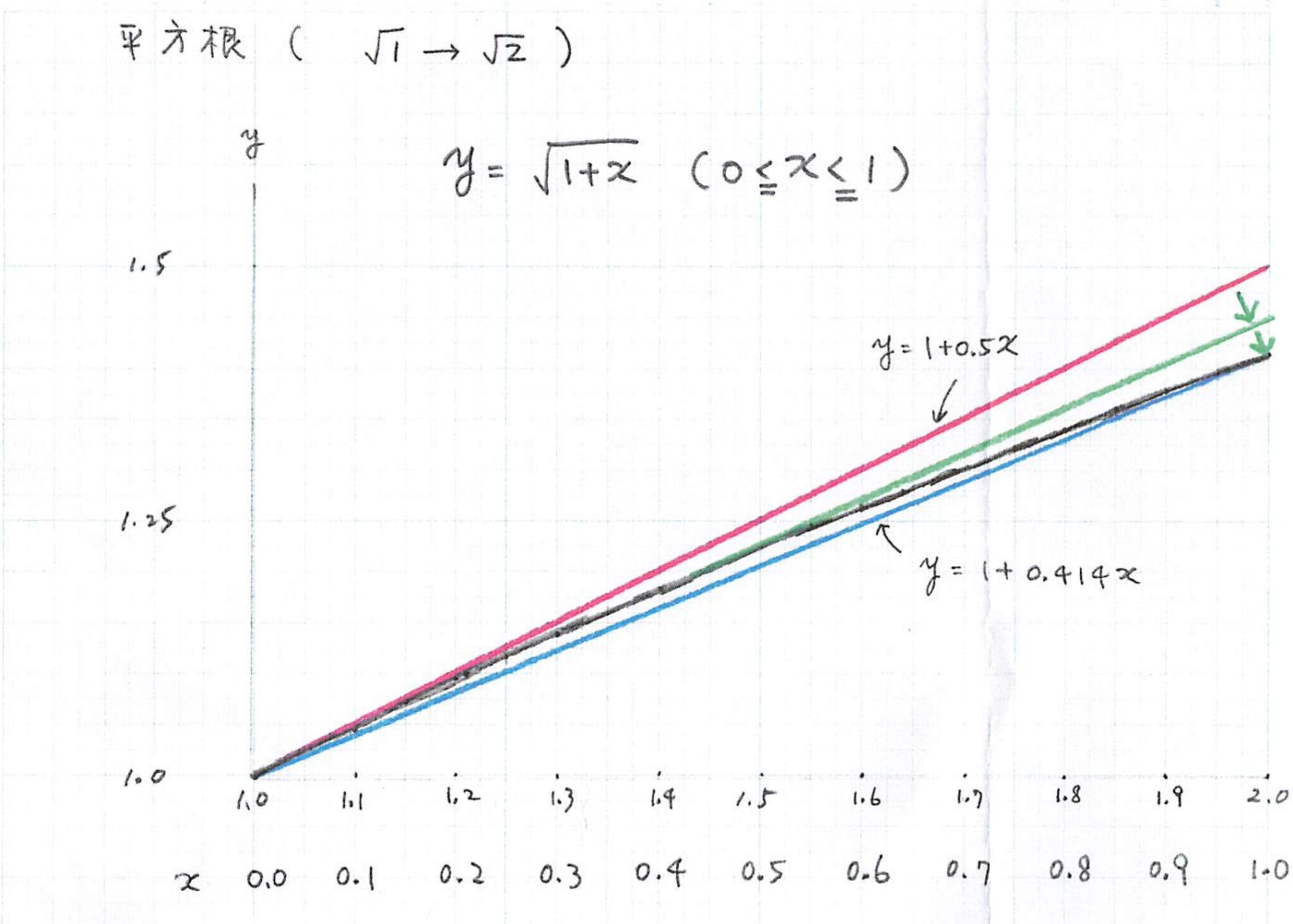
$x=1$の時

$$1 + \frac{1}{2+a} = \frac{577}{408}$$

$$a = \frac{70}{169}$$

$$y = 1 + \frac{x}{2+\frac{70}{169}x}$$

| $x$ | $ans^2$ |
|---|---|
| 0.0 | 1 |
| 0.1 | 1.100 |
| 0.2 | 1.201 |
| 0.3 | 1.302 |
| 0.4 | 1.404 |
| 0.5 | 1.504 |
| 0.6 | 1.605 ← 相対誤差が最大 |
| 0.7 | 1.705 |
| 0.8 | 1.804 |
| 0.9 | 1.902 |
| 1.0 | 2.000 |




$$y = 1 + \frac{x}{2+\frac{70}{169}x} - 0.0008$$

$x=0.0$ 　 $0.99840$ 　 $(1.00160)$

$x=0.6$ 　 $1.60286$ 　 $(1.00179)$

2次補正式

$$y = 1 + \frac{2x}{4+x-\frac{35}{204}x^2} + 0.00023$$

2019.9.25

# 誤差を制御する考え方

## 最良1次近似式の作り方　$\sqrt{x}\ (1 \leqq x \leqq 2)$

$r(x) = a(x+b)$　　$a = 0.417308$　$b = 1.414212$

相対誤差　$e(x) = (r(x) - \sqrt{x})/\sqrt{x}$

$$= a(\sqrt{x} + b/\sqrt{x}) - 1$$

1、区間の(1,2)の両端で誤差が同じ最大値となる。

$e(1) = e(2)$　　$\Rightarrow$　$b = \sqrt{2}$

2. 区間内の値　$x = x_0$ で誤差が最小となる。

$e'(x_0) = 0$　　$\Rightarrow$　$x_0 = \sqrt{2}$

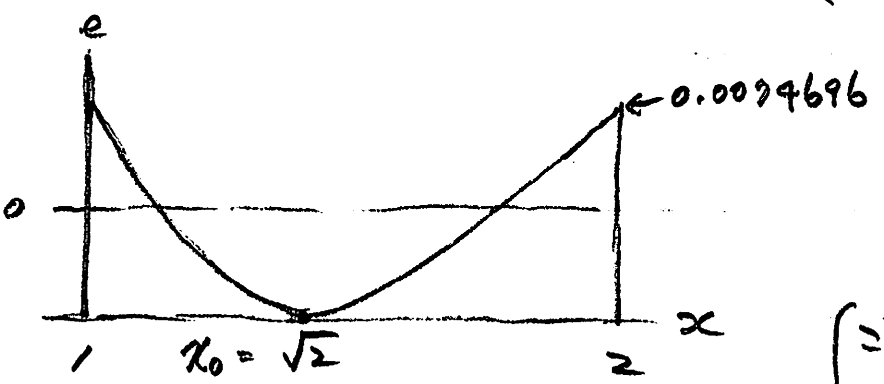
3 最大誤差と最小誤差は絶対値が等しく符号が反対である。

$e(1) + e(x_0) = 0$

$b = \sqrt{2}$　$x_0 = \sqrt{2}$ を代入して、　$a = 2/(\sqrt[4]{2} + 1)^2$

4　$e(1) = a(1+b) - 1$ に代入して最大誤差が得られる。

$e(1) = ((\sqrt[4]{2} - 1)/(\sqrt[4]{2} + 1))^2$　［誤差まで求められるので4まできちんと計算すること。］




等幅振動を解く考え方

［ここを求めるためにeを微分します。傾きが0の場所を求める。］