2019.10.22

武田利一 様

台風19号による水害は2000年9月の水害を思い出させます。

2000年の1月に通信制の高校にかよう友人から数学ノートを作ってほしいとたのまれました。基本的なテーマをとりあつかいました。このノートは10桁の電卓を使って作りました。〔1÷7について〕から始まるのは、定時制高校の数学が大きらいだった同級生との約束があったからです。1÷7から始まる数学の副教本をつくることです。いまだに未完成です。秋になってこのノートを見なおしました。

Aでは分数と小数がテーマになっています。分数について学習することで、

B(P.11)の上の書きこみ「数に語らせる<第10項までの和><第100〃>」

(P.13) 10まで作ると見えてくる → 数学が語る

(P.18) n^4の和の公式

十進法を利用する係数分解法にたどりつくことができました。次に行ったことは数列の0項に着目することでした。始まりは①の書きこみです。

(P.17) (1.1)(1) (1.3.2)(1.2) (1.7.12.6)(1.6.6)

Cは平方根をテーマにしました。(P.19)「$\sqrt{25}$のちかくは? $\sqrt{26}=\sqrt{25.1=}$」は級数展開をみつける始まりでした。

Aには素数を利用する要素分析法はまだなく、Bには連分数を使った分析はまだありません。Dの円周率についてにも、1:1と3:1の比の

2019. 10. 22

もつ意味についてはまだふれられていません。20年前の私はこのレベルから始めました。中学生の夏の自由研究集です。

(2000年秋)　階差を利用して数列の一般項を求める方法にであう。

(2001年夏)　7進法で $1 \div 5$　$1 \div 5^2$　$1 \div 5^3$　$1 \div 5^4$ の計算をして循環小数の周期の長さの例外にであう。　$4 \xrightarrow{\text{例外}} 4 \to 20 \to 100$

(2002年春)　平方根の近似分数を分析し、ハレー法(3次収束)にであう。

学習を始めてすぐに興味深いことにであえたことは幸運だったと思っています。電卓を使う上での3つの注意点は今でも大切だと思います。

① 十進法 → 十進法以外の進法
② 小数 → 分数
③ 桁数 → 表示された数値の続き

を考えることで、数値を有効に活用することができる。

基本的な10のテーマを考えました。12桁の電卓を使います。

① $1 \div 23 = 0.04347826086$

続きを求めて下さい。これは循環小数を調べる上での入口です。

② $\sqrt{2} = 1.41421356237$

続きを求めて下さい。⑨で必要になります。

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ の式の応用です。

2019.10.14

③ 筆算の割算を工夫して、1÷5 を 7進法と8進法で計算して下さい。何がわかりますか。

数の進法による性質は十進法以外の進法を調べることでよりはっきりとします。 十進法で $1\div7=0.\overline{142857}$ $142+857=999$ となります。9が並びます。他の進法で実験する場合の一番小さい素数は5になります。

十進法で 1÷7

$$
\begin{array}{lrrrrrrrr}
 & & 0. & 1 & 4 & 2 & 8 & 5 & 7 \\
\hline
7\,) & 1 & & & & & & & \\
 & -0. & & & & & & & \\
\hline
 & 1 & & & & & & & \\
\times10 & 1 & 0 & & & & & & \\
 & - & 7 & & & & & & \\
\hline
 & & 3 & & & & & & \\
\times10 & & 3 & 0 & & & & & \\
 & & -2 & 8 & & & & & \\
\hline
 & & & 2 & & & & & \\
\times10 & & & 2 & 0 & & & & \\
 & & & -1 & 4 & & & & \\
\hline
 & & & & 6 & & & & \\
\times10 & & & & 6 & 0 & & & \\
 & & & & -5 & 6 & & & \\
\hline
 & & & & & 4 & & & \\
\times10 & & & & & 4 & 0 & & \\
 & & & & & -3 & 5 & & \\
\hline
 & & & & & & 5 & & \\
\times10 & & & & & & 5 & 0 & \\
 & & & & & & -4 & 9 & \\
\hline
 & & & & & & & 1 &
\end{array}
$$

1 → 3 → 2 → 6

5 ← 4

6進法で 1÷8

$$
\begin{array}{lrrrr}
 & 0. & 0 & 4 & 3 \\
\hline
8\,) & 1 & & & \\
 & -0 & & & \\
\hline
 & 1 & & & \\
\times6 & & 6 & & \\
 & & -0 & & \\
\hline
 & & 6 & & \\
\times6 & & 3 & 6 & \\
 & & -3 & 2 & \\
\hline
 & & & 4 & \\
\times6 & & & 2 & 4 \\
 & & & -2 & 4 \\
\hline
 & & & & 0
\end{array}
$$

$$\frac{0}{6}+\frac{4}{6^2}+\frac{3}{6^3}=\frac{0+24+3}{6^3}=\frac{27}{6^3}=\frac{1}{8}$$

④ アルキメデスさんは円に内接・外接する正96角形の周長を使って円周率が約3.14であることを確かめました。では内接と外接を平均するとどうなりますか？

だれもが円周に近づくと思います。たしかに近づきますが内接と外接の比を2:1として平均した方がより円周に近づきます。では1:1の平均は？ 3:1として平均すると？ さらに誤差を調べると？

⑤ フィボナッチ数列の1の位はどうなっていますか？

条件（割る数を変えると）を変化させるとどうなりますか？

1の位は10で割ったあまりです。周期は60です。

2で割ったら周期は3、5で割ったら周期は20になります。

$10 = 2 \times 5$　　$60 = 3 \times 20$　さらにしらべると何がわかりますか？ 1÷Nの循環小数の周期の性質とくらべると？

加える数を3つにするとどうなりますか？

(ア) 0, 0, 1, ○　(イ) 0, 0, 1, ○　(ウ) 0, 0, 1, ○

剰余数列の周期の基本的な規則がわかります。1÷Nの循環小数も含まれます。この規則を知らないと7進法においての $1 \div 5$ と $1 \div 5^2$ が例外であることの重要さがわかりません。

2019.10.14

⑥ 電卓の ÷ = は何をしますか？

$\sqrt{19}$ の数値を使います。

19 √ − 4 = ÷ = − 2 = ÷ =

− 1 = ÷ = − 3 = を続けると？

⑦ 電卓の × = = = = は何をしますか？

2 × = = = = = = = = = 1024 ÷ 1000 = 1.024

1.024 × =を19回 ÷1.6 = 1.0043362776

$2^{10} = 1024 = 1.024 \times 10^3$ 　　 $3 \div 10 = 0.3$

$10 \times 20 - 4 = 196$ 　　 $3 \times 20 - 1 = 59$

$$
\begin{array}{r}
59 \div 196 = 0.3010204081 6 \\
+\,0.0000096190 6 \\
\hline
0.3010300272 2
\end{array}
$$

0.0043362776 ÷196÷2.3

何を求めていますか？　7^{510} を計算すると？

⑧ 1÷N （Nは 97 98 99 100 101 102 103）

の表を作り分析すると？

N = 100 ± a として分析します。

⑨ $\sqrt{25+a}$ 　aは

1	2	3
0.1	0.2	0.3
0.01	0.02	0.03

の表を作り分析すると？

2019.10.14

⑩ 平方数の数列の和を求める公式は?

(ア) 十進法を利用する係数分解法

$1 \to 10^n$ までの和の数値を使います。

n	10	385
	100	338350
	1000	333833500

3が並ぶのは 1÷3だから

$$\begin{array}{lr} & 333833500 \\ 1000^3 \div 3 \quad - & 333333333.333 \\ \hline & 500166.666 \end{array}$$

(イ) 素数を利用する要素分析法

(N)			
1	1	1	1
2	4	5	5
3	9	14	2・7
4	16	30	2・3・5
5	25	55	5・11
6	36	91	7・13
7	49	140	2・2・5・7
8	64	204	2・2・3・17
9	81	285	3・5・19
10	100	385	5・7・11

$\overset{2N+1}{7 = 2 \times 3 + 1}$

$5 = \underset{N+1}{4+1}$

$\overset{2\ N+1}{17 = 2 \times 8 + 1}$

$11 = \underset{N+1}{10+1}$

もしよろしければ御意見をお知らせ下さい。

2019.10.22

接線法・割線法の改良をテーマとしたレポートを作りました。

私は長い間 $y=1+0.5x$ と $y=1+0.414x$ の2つの1次式を別のものとして考えてきました。前者はテイラー展開法の後者はニュートン補間法の始まりとしてです。今年の9月になって2つの1次式を1つにまとめることができることに気がつきました。$y=1+x/(2+\frac{70}{169}x)$ という式になります。2011年3月に $y=1+2x/(4+x-\frac{35}{204}x^2)$ の式はすでに作っていました。今回は精度をすてて、式のより単純なものをと考えてたどりつきました。双曲線近似法の平方根 $1+2x/(4+x)$ を $1+x/(2+0.5x)$ と変形すると、接線法とのちがいは $+0.5x$ の部分です。$+0.5x$ では $\sqrt{2}$ が1.4になり分母が大きくなりすぎるので少しだけ小さくしようとして $+0.4x$ にして計算しました。すると区間(1→2)の近似式になっていました。$1+1/(2+0.4)=1.41666\cdots=17/12$ これは $\sqrt{2}$ の近似分数です。$17^2-1=2\times12^2$ になります。そこで $577/408=1.414215686$ の分数を使って式を作り直しました。

基本的な4つの考え方としたのは、どの考え方も大切な意味をもっているからです。①②③の考え方に④の考え方を加えるとより立体的に対象が見えると思います。2002年に二宮市三先生に教えていただいたことを位置づけることができました。

林 邦英