武田 利一 様

2019.9.25

林 邦英

少しずつ秋の深まってゆくのを感じます。日の入りが早くなり、夕方の郵便配達は気を使います。季節の変わり目です。お体に気をつけて下さい。

「接線法の改良－基本的な4つの考え方」として整理しました。1つの問題をどのように分析し、解決をするのか？を考える上でのアイデアの参考になればと思います。

名古屋市立北山中学校の社会科のT先生は多面的な物の見方の大切さを教えてくれました。（1970年↑
1987年↓ごろのことです。）

名古屋市立中央高校の理科のム先生は、物理と化学は分析方法のちがいであることを教えてくれました。名古屋は、関西と関東にはさまれていることが多様な視点を組み合わせて考える原因の1つにあるように思います。

コクヨ ケ-35 20×20

接線法の改良ー基本的な4つの考え方

平方根 $\sqrt{1+x} \fallingdotseq 1+0.5x$ のxに1を代入すると1.5となり、$\sqrt{2}=1.41421356$よりも大きくなってしまいます。この問題を解決するための基本的な4つの考え方を調べました。

① 誤差を打ち消す項をつけ加える考え方

$$y=1+\frac{1}{2}x-\frac{3}{35}x^2-0.002$$

$$(\sqrt{2}-1.5)\,x^{1+1}=x^2$$

全体として数値は真数より大きくなるので補正

テイラー展開法により、高次式を計算によって求めることができる。

② 傾きの変化に着目する考え方

$$y=1+\frac{x}{2+\frac{70}{169}x}-0.0008$$

$x=0 \to \frac{0}{2}$ $x=1 \to \frac{169}{408}$ になる。

2次補正は双曲線近似法による。3次以上は知りません。

③ 中間点の数値を利用する考え方

$$y=-0.070552x^2+0.484766x+1$$

階差0項数列を使って求めました。階差2はN^2に対応します。÷2 ×4 とすることで −0.070552 になります。階差1から階差2÷2を引き×2とすることで 0.484766になります。

2019. 9 25

一般には、ニュートン補間法(→P.58)とネスティング法(→P.11)を使って求めます。中間点を等間隔に求めずに誤差を小さくする方法があります。チェビシェフ(↙P.60)多項式と言います。「数値計算のつぼ」(共立出版 P.61)で紹介されています。(第4章 補間と数値積分～等間隔は不均衡で～)

④ 誤差を制御する考え方

2002年に 二宮市三先生に教えていただきました。「数値計算のわざ」(共立出版 P.3, P.7)で紹介されています。考え方を知るためには、最良1次近似式を作ることだと思いました。

応用数学者 Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821-1894)
(ロシア Okatovo生まれ)さんが考えた方法です。

最大絶対誤差を最小にする分子分母を1次式とする近似式を南山大学の杉浦洋先生に教えていただきました。

$$\frac{1.00038+0.67932x}{1+0.18805x}=\frac{1+0.67925x}{1+0.18805x}+\frac{38}{1.00000}$$

最大絶対誤差は 0.0004 です。

誤差を打ち消す項をつけ加える考え方

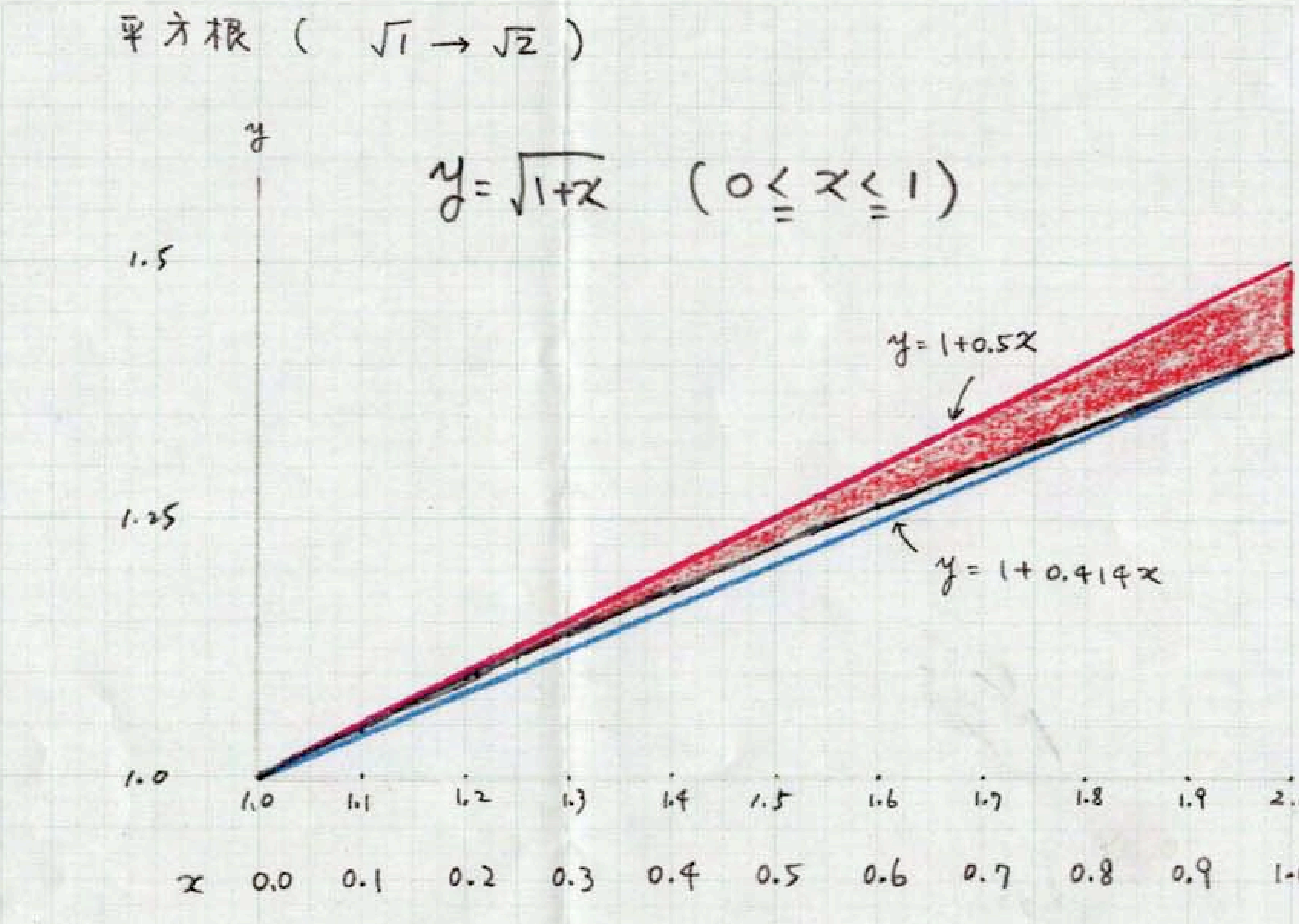
$x=1$の時の誤差を使い係数を決定する。項の次数は(+1)とする。

$1.5-\sqrt{2}=0.085786$

$1 \div \text{ans} = 11.65685$

$\text{ans} \times 3 = \dfrac{34.97056}{35}$

$\dfrac{}{3}$



$$y = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{35}x^2$$

x	ans^2
0.0	1
0.1	1.101
0.2	1.202
0.3	1.305
0.4	1.407
0.5	1.509
0.6	1.611 ← 相対誤差が最大
0.7	1.711
0.8	1.809
0.9	1.906
1.0	2.000

$$y = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{35}x^2 - 0.002$$

$x=0.0$ 0.996004 (1.00401)

$x=0.6$ 1.605651 (1.00353)

3次補正式

$$y = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{2}{51}x^3 + 0.0007$$

5次補正式

$$y = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{5}{317}x^5 + 0.0002$$

傾きの変化に着目する考え方

$x=0$ の時の傾きは 0.5

$x=1$ の時の傾きは $\sqrt{2}-1$

となるように分母を変形する。

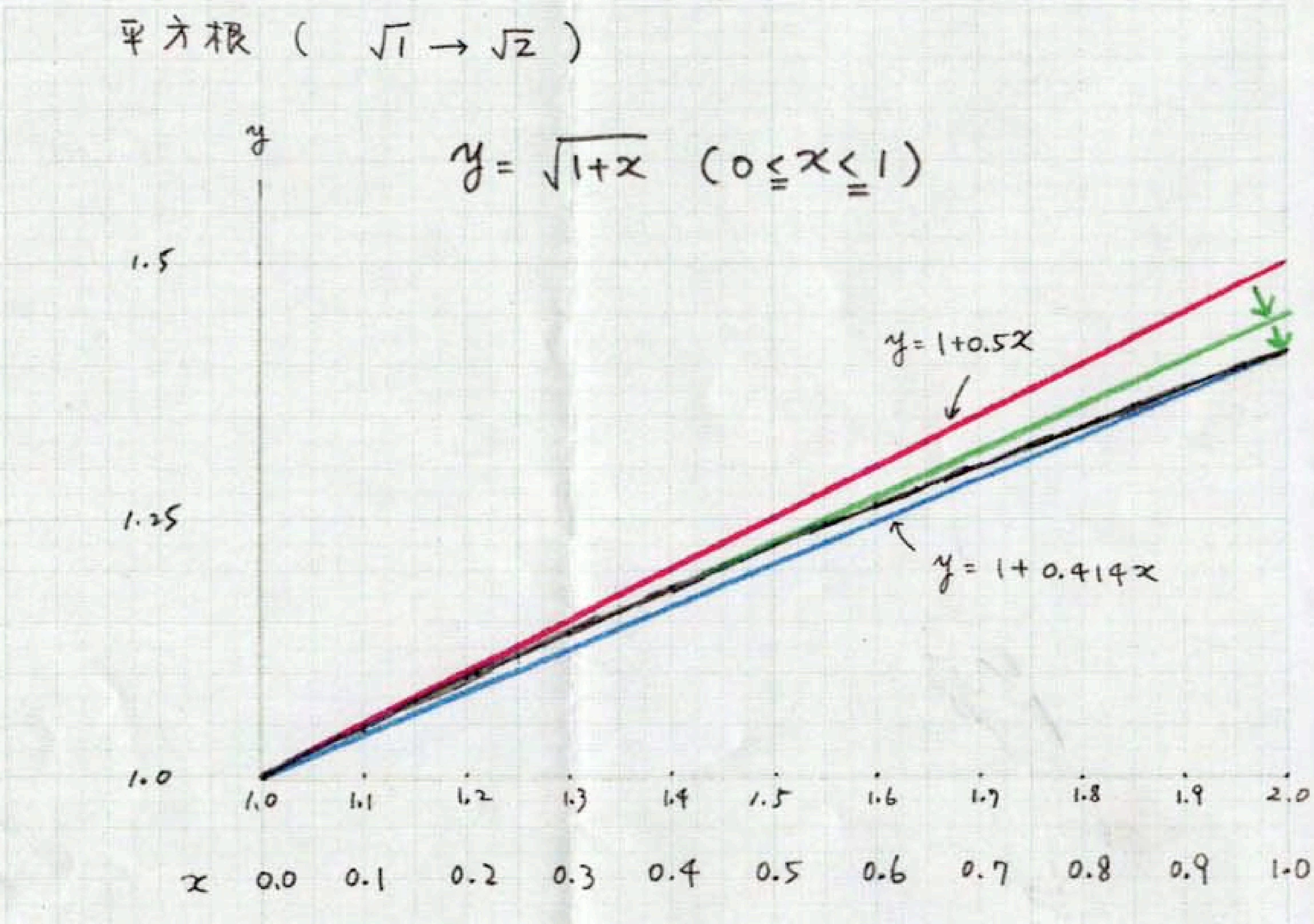
$$y = 1 + \frac{x}{2+ax}$$

$\sqrt{2} \fallingdotseq \frac{577}{408}$ とする。

$x=1$ の時

$$1 + \frac{1}{2+a} = \frac{577}{408}$$

$$a = \frac{70}{169}$$



$$y = 1 + \frac{x}{2+\frac{70}{169}x}$$

x	ans^2	
0.0	1	
0.1	1.100	
0.2	1.201	
0.3	1.302	
0.4	1.404	
0.5	1.504	
0.6	1.605	← 相対誤差が最大
0.7	1.705	
0.8	1.804	
0.9	1.902	
1.0	2.000	

$$y = 1 + \frac{x}{2+\frac{70}{169}x} - 0.0008$$

$x=0.0$　0.99840　(1.00160)

$x=0.6$　1.60286　(1.00179)

2次補正式

$$y = 1 + \frac{2x}{4+x-\frac{35}{204}x^2} + 0.00023$$

2019.9.22

中間点の数値を利用する考え方

			階差1 (N)	階差2 (N^2)
$\sqrt{1}$	0 / 0	1.000000		
			0.224745	
$\sqrt{1.5}$	1 / 0.5	1.224745		−0.035276
			0.189469	
$\sqrt{2}$	2 / 1	1.414214		

1.000000　0.224745　−0.035276

(1.2)×(−0.017638)を引く

1.000000　0.242383　0

(1)×(0.242383)を引く

1.000000　0　0

$$-0.017638N^2 + 0.242383N + 1$$

Nに$2x$を代入する

$$-0.070552x^2 + 0.484766x + 1$$

x	ans^2		ans^2/(1+x)
0.0	1.000000		1.000000
0.1	1.097824		0.998022
0.2	1.197123	(1.002404)	0.997602
0.3	1.297504		0.998080
0.4	1.398586		0.998990
0.5	1.500000		1.000000
0.6	1.601391		1.000870
0.7	1.702414		1.001420
0.8	1.802735		1.001519
0.9	1.902033		1.001070
1.0	2.000001		1.000001

2019. 9. 25

誤差を制御する考え方

最良1次近似式の作り方　$\sqrt{x}$ $(1 \leqq x \leqq 2)$

$r(x) = a(x+b)$　　$a = 0.417308$　$b = 1.414212$

相対誤差 $e(x) = (r(x) - \sqrt{x})/\sqrt{x}$

$= a(\sqrt{x} + b/\sqrt{x}) - 1$

1、区間の(1,2)の両端で誤差が同じ最大値となる。

$e(1) = e(2)$　⇨　$b = \sqrt{2}$

2. 区間内の値　$x = x_0$ で誤差が最小となる。

$e'(x_0) = 0$　⇨　$x_0 = \sqrt{2}$

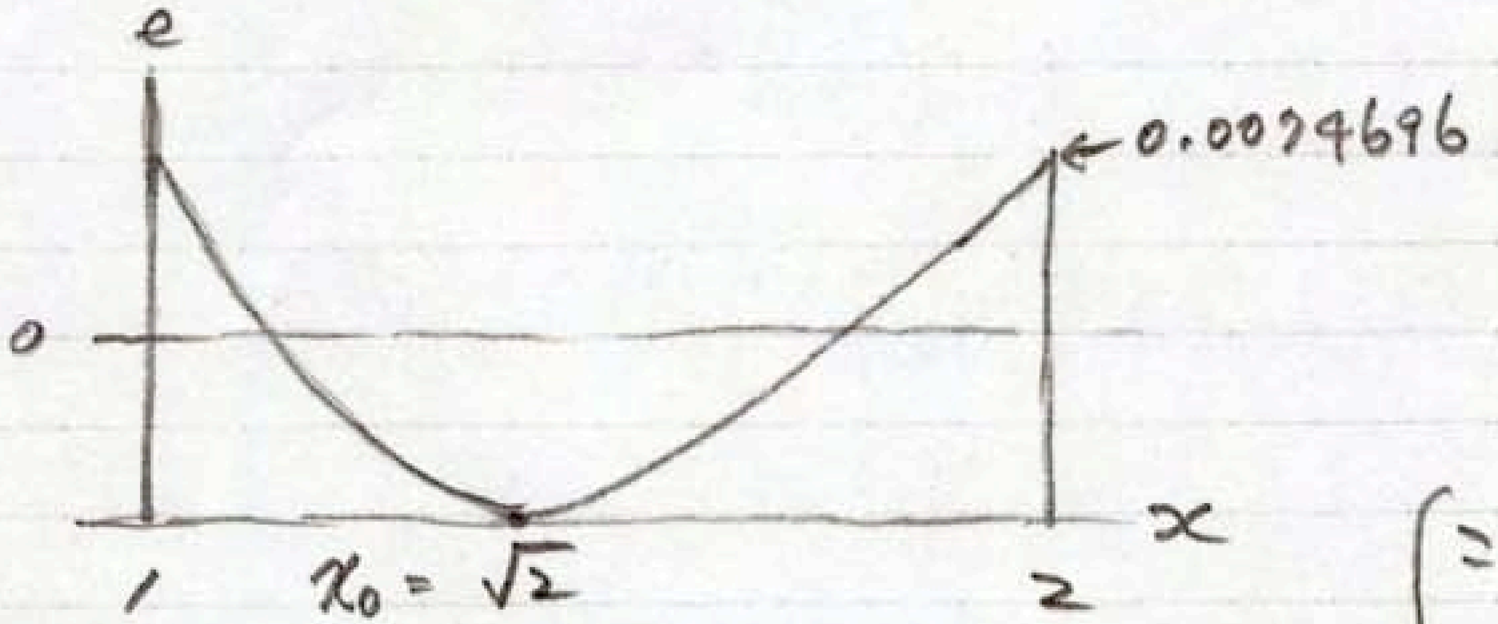
3 最大誤差と最小誤差は絶対値が等しく符号が反対である。

$e(1) + e(x_0) = 0$

$b = \sqrt{2}$　$x_0 = \sqrt{2}$ を代入して.　$a = 2/(\sqrt[4]{2} + 1)^2$

4　$e(1) = a(1+b) - 1$ に代入して最大誤差が得られる.

$e(1) = (\sqrt[4]{2} - 1)/(\sqrt[4]{2} + 1)^2$　［誤差まで求められるので4まできちんと計算すること。］



［ここを求めるためにeを微分します。傾が0の場所を求める。］

等幅振動を解く考え方