武田 利一 様

2019.7.21

林 邦英

双曲線近似法をテイラー展開法とニュートン補間多項式とくらべてみました。

もしよろしければ、御意見をお知らせ下さい。

お体に気をつけて下さい。

双曲線近似法

1　テイラー展開法と　くらべる

x^3では　1.4　x^4では　~~1.6~~ 1.7 までテイラー展開法の方が精度が良くなります。双曲線近似法は、誤差の増え方が小さく、区間近似に向いていることがわかります。

2　双曲線近似法は式の次数を変えることなく、一点近似を区間近似にすることができます。簡易計算法です。精度は良くありません。レポート（2011.2.6）「立方根の区間近似式」に作り方が書いてあります。

3　5乗根の区間（1→2）の近似式

区間（1→2）の精度を良くするために$\sqrt[5]{2}$の近似分数を使います。a^2とすることが重要です。5乗根から始めて良かったと思っています。全体の数値が真数よりも小さいので　$+b$で補正すると誤差を小さくすることができます。右側は「00」「99」がならんでいます。双曲線近似法の精度はこの程度です。

4．平方根の場合です。　$b=0.000$~~25~~235としました。

b	$a=0.1$	$a=0.7$	
0.0002	1.00037	1.00053	相対誤差の
0.0003	1.00055	1.00037	ちがい
0.00025	1.00045	1.00045	

5　立方根の場合です。

a^2 の係数を求める計算方法は、レポート（2011.3.20）「5乗根の作り方」に書いてあります。

bの決定は実験式です。aが0.4の時の精度を良くしながら、aが ~~0.1~~ 0 と0.7の時の相対誤差が近づくように注意しました。

b(5) 0.00011×5 = 0.00055
b(2) 0.00025×2 = 0.00050
b(3) 0.00018×3 = 0.00054

6　4次式のニュートン補間多項式です。作り方は、レポート（2008.3.25）「第3章の5平方根の区間近似式作り」に書いてあります。双曲線近似法とくらべると精度の良いことがわかります。

まとめ

双曲線近似法をテイラー展開法とニュートン補間多項式の4次の場合とくらべてみました。計算量を考えると、有効な簡易計算法だと思います。

立方根の近似式

テイラー展開法

$$1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3-\frac{10}{243}x^4$$

$(0<x<1)$

双曲線近似法

$$2+\frac{-3}{N+2}$$

$(1<N<2)$

x	3乗します。	N	3乗します。
0.1	1.100012 1.099999 x^4	1.1	1.099930
0.2	1.200195 1.199972	1.2	1.199463
0.3	1.300979 1.299787	1.3	1.298272
0.4	1.403070 1.399113	1.4	1.396092
0.5	1.507445 1.497323	1.5	1.492711
0.6	1.615341 1.593414	1.6	1.587963
0.7	1.72827 1.685928	1.7	1.681717
0.8	1.848009 1.772899	1.8	1.773874
0.9	1.976656 1.851804	1.9	1.864360
1.0	2.116630 1.919561	2.0	1.953125

元になる式

$$(1+x)^a=1+ax-\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3-\frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{4!}x^4+$$

$$N^{\frac{1}{a}}\fallingdotseq\frac{(a+1)N+(a-1)}{(a-1)N+(a+1)}$$

一点近似と区間近似

平方根		立方根	
$1<N<2$	$2<N<4$	$1<N<2$	$2<N<4$
$3+\dfrac{-8}{N+3}$	$5+\dfrac{-36}{N+8}$	$2+\dfrac{-3}{N+2}$	$3+\dfrac{-14}{N+6}$
一点近似	区間近似	一点近似	区間近似

N	2乗します。		N	3乗します。	
1.1	1.100	1.090	1.25	1.25	1.22
1.2	1.200	1.181	1.5	1.49	1.46
1.4	1.397	1.369	1.75	1.73	1.70
1.6	1.590	1.563	2.0	1.95	1.95
1.8	1.778	1.760	3.0	2.74	3.01
2.0	1.960	1.960	4.0	3.38	4.10
2.5	2.388	2.469	5.0	3.88	5.15
3.0	2.778	2.983	6.0	4.29	6.16
3.5	3.130	3.495	7.0	4.63	7.11
4.0	3.449	4.000	8.0	4.91	8.00

$\sqrt{4}=2$ を使って補正　　　$\sqrt[3]{8}=2$ を使って補正

区間（1→2）の近似式

5乗根　$\sqrt[5]{2} \fallingdotseq \frac{309}{269}$　を使って補正

$$\sqrt[5]{1+a} \fallingdotseq 1 + \frac{a}{2a+5-\frac{11a^2}{40}} + b$$

b=0		b=0.00011	
a	5乗しました。	a	5乗しました。
0.1	1.099979	0.1	1.100572
0.2	1.199857	0.2	1.200494
0.3	1.299601	0.3	1.300279
0.4	1.399230	0.4	1.399950
0.5	1.498807	0.5	1.499568
0.6	1.598428	0.6	1.599228
0.7	1.698210	0.7	1.699051
0.8	1.798295	0.8	1.799175
0.9	1.898837	0.9	1.899756
1.0	2.000005	1.0	2.000962

区間 (1→2) の近似式

平方根 $\sqrt{2} \fallingdotseq \dfrac{1393}{985}$ を使って補正

$$\sqrt{1+a} \fallingdotseq 1 + \frac{2a}{4+a-\frac{35a^2}{204}} + b$$

b = 0		b = 0.00025	
a	2乗しました。	a	2乗しました。
0.1	1.099983	0.1	1.100508
0.2	1.199888	0.2	1.200436
0.3	1.299686	0.3	1.300256
0.4	1.399393	0.4	1.399985
0.5	1.499059	0.5	1.499671
0.6	1.598758	0.6	1.599390
0.7	1.698584	0.7	1.699236
0.8	1.798649	0.8	1.799319
0.9	1.899076	0.9	1.899765
1.0	1.999999	1.0	2.000706

b	a = 0.1	a = 0.7	a = 1
0.0002	1.100403	1.699105	2.000565
0.0003	1.100613	1.699366	2.000848

区間（1→2）の近似式

立方根 $\sqrt[3]{2} \fallingdotseq \dfrac{286}{227}$ を使って補正

$$\sqrt[3]{1+a} \fallingdotseq 1 + \cfrac{a}{3+a-\cfrac{9a^2}{59}} + b$$

b = 0		b = 0.00018	
a	3乗しました。	a	3乗しました。
0.1	1.099980	0.1	1.100556
0.2	1.199867	0.2	1.200477
0.3	1.299628	0.3	1.300272
0.4	1.399282	0.4	1.399958
0.5	1.498886	0.5	1.499594
0.6	1.598528	0.6	1.599267
0.7	1.698320	0.7	1.699089
0.8	1.798390	0.8	1.799189
0.9	1.898883	0.9	1.899712
1.0	1.999956	1.0	2.000814

平方根の区間近似　$\sqrt{1+a}$　$(0<a<1)$

4次式の　ニュートン補間多項式

$$-0.01024\,a^4 + 0.044608\,a^3 - 0.119568\,a^2 + 0.4994\,a + 1\ .$$

a	2乗しました。		
0.1	1.099956	$\sqrt{1}$	1.000000
0.2	1.199984	$\sqrt{1.25}$	1.118034
0.3	1.300011	$\sqrt{1.5}$	1.224745
0.4	1.400014	$\sqrt{1.75}$	1.322876
0.5	1.499998	$\sqrt{2}$	1.414214
0.6	1.599981		
0.7	1.699982		
0.8	1.800002		
0.9	1.900016		
1.0	1.999962		

の数値を使います。