武田 利一 様

2019.2.6

林 邦英

平均の方法とアラビアの方法の関係を整理しました。どちらも重要な方法です。

基本となる考え方と連算術としました。

$$\sqrt{A^2+B} \fallingdotseq A+\frac{B}{2A}$$

インドでも古くから知られていました。

この式から

① 接線法 ⟶ ニュートン法（反復使用）

② 簡便型の連分数

③ 級数展開　（私は $\sqrt{25+a}$ の表の分析がきっかけであったと考えています。）

が生まれてきたことは、まちがいないと思います。

$\sqrt{19}$ の観察を作り直しました。安島直円さんの考え方に立った「平方零約術への道」がわかりやすくなったと思います。

もしよろしければ、御意見をお知らせ下さい。

コクヨ ケ-35 20×20

開平法で $\sqrt{19}$ を求める

$$\sqrt{19} = 4.3588989$$

4	⊗	19	
⊕ 4		−16	
83	⊗	300	
⊕ 3		−249	
865	⊗	5100	
⊕ 5		−4325	
8708	⊗	77500	
⊕ 8		−69664	
87168	⊗	783600	
⊕ 8		−697344	
871769	⊗	8625600	
⊕ 9		−7845921	
8717788	⊗	77967900	
⊕ 8		−69742304	
87177969	⊗	822559600	
⊕ 9		−784601721	
871779784	⊗	37957879	
⊕ 4		−34871191	
871779788		3086687	

$\sqrt{19}$ の観察（12桁の電卓を使って）

19 √			4. 3588989 4354
− 4	=		0. 3588989 4354
÷	=		2. 7862996 4785
− 2	=		0. 7862996 4785
÷	=		1. 271779 7887
− 1	=		0. 271779 7887
÷	=		3. 6794494 7188
− 3	=		0. 6794494 7188
÷	=		1. 4717797 8847
− 1	=		0. 4717797 8847
÷	=		2. 1196329 8225
− 2	=		0. 1196329 8225
÷	=		8. 3588988 6879
− 8	=		0. 3588988 6879

電卓の実験を式で表現する。

正則連分数の構造

$$\sqrt{19} = 4 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}}}}}}$$

くり返す

$$\overset{\times 2}{\overbrace{4 \quad 2 \quad 1 \quad 3 \quad 1 \quad 2 \quad 8}}$$

同じ

$\sqrt{19} = 4 + (2, 1, 3, 1, 2, 8)_n$ 型連分数

		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{0}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{13}{3}$	$\frac{48}{11}$	$\frac{61}{14}$	$\boxed{\frac{170}{39}}$

$(分子)^2 - 19 \times (分母)^2$

1	−3	5	−2	5	−3	1

$$\frac{1}{2}\begin{cases} 1\times1+4\times2=9 \\ 0\times1+1\times2=2 \end{cases}$$

$170 \times 2 = 340$

$$\frac{1}{1}\begin{cases} 4\times1+9\times1=13 \\ 1\times1+2\times1=3 \end{cases}$$

$170 \times 340 - 1 = 57799$

$39 \times 340 = 13260$

$$\frac{1}{3}\begin{cases} 9\times1+13\times3=48 \\ 2\times1+3\times3=11 \end{cases}$$

$$\frac{170}{39} - \frac{1}{2\times170\times39}$$

$$\frac{1}{1}\begin{cases} 13\times1+48\times1=61 \\ 3\times1+11\times1=14 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\begin{cases} 48\times1+61\times2=170 \\ 11\times1+14\times2=39 \end{cases}$$

$\sqrt{19} = 4 + (2.1.3.1.2.8)_n$ 型連分数

弱3	強5	弱2	強5	弱3	強1
$1/8$	$1/2$	$1/1$	$1/3$	$1/1$	$1/2$
$\frac{-20744}{4759}$	$\frac{16311}{-3742}$	$\frac{-4433}{1017}$			$\frac{170}{-39}$
$\frac{-61}{14}$	$\frac{48}{-11}$	$\frac{-13}{3}$	$\frac{9}{-2}$	$\frac{-4}{1}$	$\frac{1}{0}$
$\frac{4}{1}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{13}{3}$	$\frac{48}{11}$	$\frac{61}{14}$	$\boxed{\frac{170}{39}}$
$\frac{1421}{326}$	$\frac{3012}{691}$	$\frac{4433}{1017}$	$\frac{16311}{3742}$	$\frac{20744}{4759}$	$\frac{57799}{13260}$
$\frac{483136}{110839}$	$\frac{1024071}{234938}$	$\frac{1507207}{345777}$			$\frac{19651490}{4508361}$

① 強1 の最小分子 170 が たての規則の基準になっている。$170 \times 2 = 340$

$$\begin{pmatrix} 強1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} 170 \times 340 - 1 &= 57799 \\ 39 \times 340 - 0 &= 13260 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 弱3 \\ 1/8 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} 1421 \times 340 - 4 &= 483136 \\ 326 \times 340 - 1 &= 110839 \end{aligned}$$

② 上方に数表を拡張する。

(弱3 $1/8$) と (弱3 $1/1$)

(強5 $1/2$) と 強5 $1/3$)

は対応している。

(弱2 $1/1$) と (強1 $1/2$)

は絶対値が対称になっている。

平方零約術　（久留島義太作）

甲　$19 = 4^2 + 3$

$\frac{4}{1}$　第1漸近数

乙　$2 \times 4 = 2 \times 3 + 2$

$2 \times 4 - 2 = 6$　乙段実

$\frac{6 \times 2 + 3}{3} = 5$　乙強数

$\frac{4 \times 2 + 1}{1 \times 2} = \frac{9}{2}$　第2漸近数

丙　$6 = 1 \times 5 + 1$

$2 \times 4 - 1 = 7$　丙段実

$\frac{7 \times 1 + 3}{5} = 2$　丙弱数

$\frac{9 \times 1 + 4}{2 \times 1 + 1} = \frac{13}{3}$　第3漸近数

丁　$7 = 3 \times 2 + 1$

$2 \times 4 - 1 = 7$　丁段実

	分母	分子	強弱	実	段数	段余
甲	1	4	原3	8		
乙	2	9	強5	6	2	2
丙	3	13	弱2	7	1	1
丁	11	48	強5	7	3	1

$\frac{7 \times 1 + 3}{2} = 5$　丁強数

$\frac{13 \times 3 + 9}{3 \times 3 + 2} = \frac{48}{11}$　第4漸近数

丙　弱2を使う　（強5にはさまれている）

$\frac{13 \times 2}{2} = 13$

$13 \times 13 + 1 = \boxed{\frac{170}{39}}$　強分子

$3 \times 13 =$　強分母

$\frac{13}{3} + \frac{2}{2 \times 13 \times 3} = \frac{13 \times 13 + 1}{3 \times 13}$

平方零約術 への道

電卓の数値を式を使って表現する

$$\sqrt{19} = 4 + \sqrt{19} - 4$$

$$\frac{1}{\sqrt{19}-4} = \frac{\sqrt{19}+4}{3} = \frac{\sqrt{19}-4+8}{3} = 2 + \frac{\sqrt{19}-2}{3}$$

$$\frac{3}{\sqrt{19}-2} = \frac{3(\sqrt{19}+2)}{15} = \frac{\sqrt{19}+2}{5} = \frac{\sqrt{19}-4+6}{5}$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{19}-3}{5}$$

$$\frac{5}{\sqrt{19}-3} = \frac{5(\sqrt{19}+3)}{10} = \frac{\sqrt{19}+3}{2} = \frac{\sqrt{19}-4+7}{2}$$

$$= 3 + \frac{\sqrt{19}-3}{2}$$

$$\frac{2}{\sqrt{19}-3} = \frac{2(\sqrt{19}+3)}{10} = \frac{\sqrt{19}+3}{5} = \frac{\sqrt{19}-4+7}{5}$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{19}-2}{5}$$

$$\frac{5}{\sqrt{19}-2} = \frac{5(\sqrt{19}+2)}{15} = \frac{\sqrt{19}+2}{3} = \frac{\sqrt{19}-4+6}{3}$$

$$= 2 + \frac{\sqrt{19}-4}{3}$$

わかること ① $\sqrt{19} = \sqrt{19} - 4 + 4$ と変形する必要がある。

② 小数部分は計算する必要はない。

$$\frac{3}{\sqrt{19}-4} = \frac{3(\sqrt{19}+4)}{3} = \frac{\sqrt{19}+4}{1} = \frac{\sqrt{19}-4+8}{1}$$

$$= 8 + \frac{\sqrt{19}-4}{1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{19}-4} =$$

$$2 + \frac{\sqrt{19}-2}{3} = 2.7862996478 4$$

$$1 + \frac{\sqrt{19}-3}{5} = 1.2717797887$$

$$3 + \frac{\sqrt{19}-3}{2} = 3.6794494717 7$$

$$1 + \frac{\sqrt{19}-2}{5} = 1.4717797887$$

$$2 + \frac{\sqrt{19}-4}{3} = 2.1196329811 8$$

$$8 + \frac{\sqrt{19}-4}{1} = 8.3588989435 4$$

$$\sqrt{19} = 4+\varepsilon \qquad \varepsilon = \sqrt{19}-4$$ 正則連分数

$$\sqrt{19} = 4 + \varepsilon = 4 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\varepsilon}}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{19}-4} = \frac{\sqrt{19}+4}{19-16} = \frac{\sqrt{19}+4}{3}$$

$$= \frac{4+\varepsilon+4}{3} = \frac{8+\varepsilon}{3} = 2 + \frac{2+\varepsilon}{3} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{3}{2+\varepsilon}}$$

$$\frac{3}{2+\varepsilon} = \frac{3}{2+\sqrt{19}-4} = \frac{3}{\sqrt{19}-2}$$

$$= \frac{3(\sqrt{19}+2)}{19-4} = \frac{3(\sqrt{19}+2)}{15} = \frac{\sqrt{19}+2}{5} = \frac{4+\varepsilon+2}{5}$$

$$= \frac{6+\varepsilon}{5} = 1 + \frac{1+\varepsilon}{5} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{5}{1+\varepsilon}}$$

$$\frac{5}{1+\varepsilon} = \frac{5}{1+\sqrt{19}-4} = \frac{5}{\sqrt{19}-3} = \frac{5(\sqrt{19}+3)}{19-9}$$

$$= \frac{5(\sqrt{19}+3)}{10} = \frac{\sqrt{19}+3}{2} = \frac{4+\varepsilon+3}{2} = \frac{7+\varepsilon}{2}$$

$$= 3 + \frac{1+\varepsilon}{2} = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{2}{1+\varepsilon}}$$

① 小数部分をεとすることで式が見やすくなる。 ② $\varepsilon = \cfrac{1}{\cfrac{1}{\varepsilon}}$ とすることで構造がわかりやすくなる。

$$\frac{2}{1+\varepsilon} = \frac{2}{1+\sqrt{19}-4} = \frac{2}{\sqrt{19}-3} = \frac{2(\sqrt{19}+3)}{19-9}$$

$$= \frac{2(\sqrt{19}+3)}{10} = \frac{\sqrt{19}+3}{5} = \frac{4+\varepsilon+3}{5}$$

$$= \frac{7+\varepsilon}{5} = 1 + \frac{2+\varepsilon}{5} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{5}{2+\varepsilon}}$$

$$\frac{5}{2+\varepsilon} = \frac{5}{2+\sqrt{19}-4} = \frac{5}{\sqrt{19}-2} = \frac{5(\sqrt{19}+2)}{19-4}$$

$$= \frac{5(\sqrt{19}+2)}{15} = \frac{\sqrt{19}+2}{3} = \frac{4+\varepsilon+2}{3} = \frac{6+\varepsilon}{3}$$

$$= 2 + \frac{\varepsilon}{3} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{3}{\varepsilon}}$$

$$\frac{3}{\varepsilon} = \frac{3}{\sqrt{19}-4} = \frac{3(\sqrt{19}+4)}{19-16} = \frac{3(\sqrt{19}+4)}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{19}+4}{1} = \frac{4+\varepsilon+4}{1} = 8 + \frac{\varepsilon}{1} = 8 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\varepsilon}}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} =$$

$\sqrt{19}$ 正則連分数の表の観察

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{8+\varepsilon}{3} = 2 + \frac{2+\varepsilon}{3}$$

$$\frac{3}{2+\varepsilon} = \frac{6+\varepsilon}{5} = 1 + \frac{1+\varepsilon}{5}$$

$$\frac{5}{1+\varepsilon} = \frac{7+\varepsilon}{2} = 3 + \frac{1+\varepsilon}{2}$$

$$\frac{2}{1+\varepsilon} = \frac{7+\varepsilon}{5} = 1 + \frac{2+\varepsilon}{5}$$

$$\frac{5}{2+\varepsilon} = \frac{6+\varepsilon}{3} = 2 + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\frac{3}{\varepsilon} = \frac{8+\varepsilon}{1} = 8 + \frac{\varepsilon}{1}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} =$$

上の部分に着目します。

段数が決定される部分です。

実　段数　強弱　段余　の関係

8	=	2	×	3	+	2
6	=	1	×	5	+	1
7	=	3	×	2	+	1
7	=	1	×	5	+	2
6	=	2	×	3	+	0
8	=	8	×	1	+	0
8	=	2	×	3	+	2
6	=	1	×	5	+	1

ユークリッド互除法を使って式の形を決定

$$19 = 4^2 + 3 \quad \sqrt{19} \fallingdotseq 4 + \frac{3}{8} = \frac{35}{8}$$

$35 = 4 \times 8 + 3$

$8 = 2 \times 3 + 2$

$3 = 1 \times 2 + 1$

$2 = 2 \times 1 + 0$

		$1/2$	$1/1$	$1/2$
$\frac{1}{0}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{13}{3}$	$\frac{35}{8}$

実の決定法

$$8 = 2 \times 3 + 2$$

$8 - 2 = 6 = 1 \times 5 + 1$

$8 - 1 = 7 = 3 \times 2 + 1$

$8 - 1 = 7 = 1 \times 5 + 2$

$8 - 2 = 6 = 2 \times 3 + 0$

$8 - 0 = 8 = 8 \times 1 + 0$

$8 - 0 = 8 = 2 \times 3 + 2$

$8 - 2 = 6 = 1 \times 5 + 1$

$19 = 4^2 + 3$ の4を使います。

$(4 \times 2 = 8)$ − (1段上の段余) = 実

強弱の決定法

強弱	実	段余	原強弱
3	8	0	+3
5	6	2	+3
2	7	1	+3
5	7	1	+3

$3 \times 5 = 15 = 6 \times 2 + 3$

$(6 \times 2 + 3) \div 3 = 5$

$5 \times 2 = 10 = 7 \times 1 + 3$

$(7 \times 1 + 3) \div 5 = 2$

$2 \times 5 = 10 = 7 \times 1 + 3$

$(7 \times 1 + 3) \div 2 = 5$

$19 = 4^2 + 3$ の 3（原強弱）を使います。

[別解]

$\sqrt{67}$ の場合

$67 = 8^2 + 3 \qquad \sqrt{67} = 8 + \dfrac{3}{16+}$

	8	3/16	3/16	3/16
$\frac{1}{0}$	$\frac{8}{1}$	$\frac{131}{16}$	$\frac{2120}{259}$	$\frac{34313}{4192}$
強	弱	強	弱	強
1	3	9	27	81

$34313 = 8 \times 4192 + 777$

$4192 = 5 \times 777 + 307$

$777 = 2 \times 307 + 163$

$307 = 1 \times 163 + 144$

$163 = 1 \times 144 + 19$

$144 = 7 \times 19 + 11$

$19 = 1 \times 11 + 8$

$11 = 1 \times 8 + 3$

$8 = 2 \times 3 + 2$

回文構造を想定した後半の予想　$1/7 \to 1/1 \to 1/1 \to 1/2 \to (1/5)$

強1

	8	1/5	1/2	1/1	1/1	1/7
$\frac{1}{0}$	$\frac{8}{1}$	$\frac{41}{5}$	$\frac{90}{11}$	$\frac{131}{16}$	$\frac{221}{27}$	$\frac{1678}{205}$
強	弱	強	弱	強	弱	強
1	3	6	7	9	2	9

$\dfrac{131}{16}$ を使って

$131 = 8 \times 16 + 3$

$\boxed{16 = 5 \times 3 + 1}$

$\dfrac{2120}{259}$ を使って

$2120 = 8 \times 259 + 48$

$259 = 5 \times 48 + 19$

$48 = 2 \times 19 + 10$

$19 = 1 \times 10 + 9$

$\boxed{10 = 1 \times 9 + 1}$

実　段数　強弱　段余

$16 = 5 \times 3 + 1$

$○ = 2 \times 6 + ○$

$○ = 1 \times 7 + ○$

$10 = 1 \times 9 + 1$

↑ この関係がわかればユークリッド互除法を使わなくてもすむ。

$$\frac{170555}{39128} - \frac{729}{2\times170555\times39128}$$

$19 = 4^2 + 3$　　$\sqrt{19} = 4 + \frac{3}{8+}$ 型連分数

$3/8$　$3/8$　$3/8$　$3/8$

$$\frac{1}{0}\quad \frac{4}{1}\quad \frac{35}{8}\quad \frac{292}{67}\quad \frac{2441}{560}\quad \frac{20404}{4681}$$

1　-3　9　-27　81　-243

$$3/8\left\{\begin{array}{l} 2441\times3 + 20404\times8 = 170555 \\ 560\times3 + 4681\times8 = 39128 \end{array}\right.\quad 729$$

$170555 = 4\times39128 + 14043$

$39128 = 2\times14043 + 11042$

$14043 = 1\times11042 + 3001$

$11042 = 3\times3001 + 2039$

$3001 = 1\times2039 + 962$

$2039 = 2\times962 + 115$

$962 = 8\times115 + 42$

$115 = 2\times42 + 31$　　　$11 = 1\times9 + 2$

$42 = 1\times31 + 11$　　　$9 = 4\times2 + 1$

$31 = 2\times11 + 9$　　　$2 = 2\times1 + 0$

① 平均の方法 （基本となる考え方）

$$\frac{A+B}{2} > \sqrt{A\cdot B} > \frac{2\cdot A\cdot B}{A+B}$$

② アラビアの方法 （速算術）

$$A + \frac{B}{2A} > \sqrt{A^2+B} > A + \frac{B}{2A+1}$$

③

(ア) 簡便型 の連分数

$$\sqrt{19} = 4 + \frac{3}{8+}\qquad \sqrt{A^2+B} = A + \frac{B}{2A+}$$

(イ) ユークリッド互除法を使って分析した連分数

（分子は 1 なので省略する）

$$\sqrt{19} = 4 + (2.1.3.1.2.8)_n$$

( ) の内が奇数の場合は $2n$

$\sqrt{2} = 1 + (2)_{2n}$ 〔2周することで強弱に対応する〕

$\sqrt{13} = 3 + (1.1.1.1.6)_{2n}$

平均の方法　$\sqrt{19}$ の場合

$$\frac{\frac{4}{1}+\frac{1\times19}{4}}{2}=\frac{16+19}{8}=\frac{35}{8}=\boxed{4+\frac{3}{8}}$$ ①

$$\frac{\frac{35}{8}+\frac{8\times19}{35}}{2}=\frac{2441}{560}=\boxed{\frac{35}{8}-\frac{9}{2\times8\times35}}$$ ②

$$\frac{\frac{2441}{560}+\frac{560\times19}{2441}}{2}=\frac{11916881}{2733920}$$

$4^2-1^2\times19=$ -3

$35^2-8^2\times19=$ 9

$2441^2-560^2\times19=$ 81

$11916881^2-2733920^2\times19=$ 6561

$-3=(-3)^1$　(分子)^2−(分母)$^2\times19$

$9=(-3)^2$　強弱を調べる。

$81=(-3)^4$

$6561=(-3)^8$

① アラビアの方法は「平均」の方法を分析することでみつけることができる。

$$\sqrt{A^2+B}\fallingdotseq A+\frac{B}{2A}$$

$$\sqrt{19}=\sqrt{4^2+3}\fallingdotseq 4+\frac{3}{8}$$

+3

4^2

4×2

② 強弱を使って近似分数の精度を良くする方法がわかる。

③「平均」の方法は、2次収束である。

$(-3)^1\to(-3)^2\to(-3)^4\to(-3)^8$

① -3 → ② 9 → ③ 81 → ④ 6561

④ $\sqrt{19}=4+\frac{3}{8+}$ 型連分数は一次収束で基準となる分数列を作り出す。

① -3 → ② 9 → ③ -27 → ④ 81 →