武田 利一 様

2019.1.28

林 邦英

平方根に関する2種類の連分数のちがいをはっきりとさせました。

○ $\sqrt{19} = 4 + \dfrac{3}{8+}$ 型

初期値を「4」にする場合の一次収束になります。基準の分数列です。

2次収束では、

$$①\ \frac{4}{1} \rightarrow ②\ \frac{35}{8} \rightarrow ④\ \frac{2441}{560} \rightarrow ⑧\ \frac{1191688l}{2733920}$$

3次収束では、

$$①\ \frac{4}{1} \longrightarrow ③\ \frac{292}{67} \longrightarrow ⑨$$

$$②\ \frac{35}{8} \longrightarrow ⑥\ \frac{170555}{39128} \longrightarrow ⑱$$

になります。

分数列は「直線」的です。

○ $\sqrt{19} = 4 + (2.1.3.1.2.8)_n$ 型

分数列は「平面」的です。

たての関係は、強1の最小分子「170」によって決まります。$170 \times 2 = 340$

数表を上へ拡張すると「対称」があらわれます。

平方零約術のアイデアのきっかけが$\sqrt{67}$にあったという仮説は残しておきます。理由はここにたどりつくまでの計算量が少いからです。説明するのと発見をするのは別の話だと思います。運も能力だと思います。

寒い日が続きます。お体に気をつけてください。

$19 = 4^2 + 3$ $\quad \sqrt{19} = 4 + \frac{3}{8+}$ 型連分数

$$\frac{\frac{4}{1} + \frac{1\times 19}{4}}{2} = \frac{16+19}{8} = \frac{35}{8} = \boxed{4 + \frac{3}{8}}$$

$$\frac{\frac{35}{8} + \frac{8\times 19}{35}}{2} = \frac{2441}{560}$$

$$\frac{\frac{2441}{560} + \frac{560\times 19}{2441}}{2} = \frac{11916881}{2733920}$$

$$4^2 - 1^2 \times 19 = -3$$
$$35^2 - 8^2 \times 19 = 9$$
$$2441^2 - 560^2 \times 19 = 81$$
$$11916881^2 - 2733920^2 \times 19 = 6561$$

$-3 = (-3)^1$ $\quad (分子)^2 - (分母)^2 \times 19$

$9 = (-3)^2$ $\quad$ 強弱を調べる。

$81 = (-3)^4$

$6561 = (-3)^8$

は $\sqrt{A^2+B} \fallingdotseq A + \frac{B}{2A}$ を利用する一次収束である。

① $\sqrt{A^2+B} \fallingdotseq A + \frac{B}{2A}$

$$\sqrt{19} = \sqrt{4^2+3} \fallingdotseq \underset{4^2}{4} + \frac{\overset{+3}{3}}{\underset{4\times 2}{8}}$$

アラビアの方法は「平均」の方法を分析することでみつけることができる。

②

強弱

$\frac{4}{1}$ 弱3

$(-3)^2$

$\frac{35}{8}$ 強9

9^2

$\frac{2441}{560}$ 強81

81^2

$\frac{11916881}{2733920}$ 強6561

2次収束の計算である。

$\sqrt{67}$ の場合

$67 = 8^2 + 3 \qquad \sqrt{67} = 8 + \frac{3}{16+}$

8	3/16	3/16		3/16
$\frac{1}{0}$	$\frac{8}{1}$	$\frac{131}{16}$	$\frac{2120}{259}$	$\frac{34313}{4192}$
強	弱	強	弱	強
1	3	9	27	81

$34313 = 8 \times 4192 + 777$

$4192 = 5 \times 777 + 307$

$777 = 2 \times 307 + 163$

$307 = 1 \times 163 + 144$

$163 = 1 \times 144 + 19$

$144 = 7 \times 19 + 11$

$19 = 1 \times 11 + 8$

$11 = 1 \times 8 + 3$

$8 = 2 \times 3 + 2$

	8	1/5	1/2	1/1	1/1	1/7
$\frac{1}{0}$	$\frac{8}{1}$	$\frac{41}{5}$	$\frac{90}{11}$	$\frac{131}{16}$	$\frac{221}{27}$	$\frac{1678}{205}$
強	弱	強	弱	強	弱	強
1	3	6	7	9	2	9

$\frac{131}{16}$ を使って

$131 = 8 \times 16 + 3$

$\boxed{16 = 5 \times 3 + 1}$

$\frac{2120}{259}$ を使って

$2120 = 8 \times 259 + 48$

$259 = 5 \times 48 + 19$

$48 = 2 \times 19 + 10$

$19 = 1 \times 10 + 9$

$\boxed{10 = 1 \times 9 + 1}$

実　段数 強弱 段余

$16 = 5 \times 3 + 1$

$= 2 \times 6 +$

$= 1 \times 7 +$

$10 = 1 \times 9 + 1$

$\sqrt{19} = 4 + (2.1.3.1.2.8)_m$ 型連分数

弱3	強5	弱2	強5	弱3	強1
$1/8$	$1/2$	$1/1$	$1/3$	$1/1$	$1/2$
$\frac{-20744}{4759}$	$\frac{16311}{-3742}$	$\frac{-4433}{1017}$			$\frac{170}{-39}$
$\frac{-61}{14}$	$\frac{48}{-11}$	$\frac{-13}{3}$	$\frac{9}{-2}$	$\frac{-4}{1}$	$\frac{1}{0}$
$\frac{4}{1}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{13}{3}$	$\frac{48}{11}$	$\frac{61}{14}$	$\frac{170}{39}$
$\frac{1421}{326}$	$\frac{3012}{691}$	$\frac{4433}{1017}$	$\frac{16311}{3742}$	$\frac{20744}{4759}$	$\frac{57799}{13260}$
$\frac{483136}{110839}$	$\frac{1024071}{234938}$	$\frac{1507207}{345777}$			$\frac{19651490}{4508361}$

① 強1 の最小分子 170 が たての規則の基準になっている。$170 \times 2 = 340$

$$\begin{pmatrix} 強1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} 170 \times 340 - 1 = 57799 \\ 39 \times 340 - 0 = 13260 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 弱3 \\ 1/8 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} 1421 \times 340 - 4 = 483136 \\ 326 \times 340 - 1 = 110839 \end{array}$$

② 上方に数表を拡張する。

(弱3 1/8) と (弱3 1/1)

(強5 1/2) と 強5 1/3)

は対応している。

(弱2 1/1) と (強1 1/2)

は絶対値が対称になっている。