武田 利一 様

2019.1.21

林 邦英

平方零約術について整理しました。

① 和田先生の「数の世界」の方法とのちがいを利用して、$\sqrt{67} \fallingdotseq 8 + \frac{3}{16}$ の役割を見直しました。

② 深川英俊さんの「江戸時代のフェルマー－ペル方程式の解法」で紹介されている、安島直円さんの研究より、小数による分析を見直しました。

③ 加藤秀隆さんの「平方根の正則連分数に関する考察」(その8)｛izumi-math｝にある $\sqrt{67}$ の計算式を使いました。

もしよろしければ、御意見をお知らせください。

久留島義太さんの平方零約術について

2019.1.21

林 邦英

$\sqrt{67}$ の場合

① $67 = 8^2 + 3$ （甲）

② $\dfrac{8}{1}$

③ $2 \times 8 = 5 \times 3 + 1$ （乙）

④ $2 \times 8 - 1 = 15$

⑤ $\dfrac{15 \times 1 + 3}{3} = 6$

⑥ $\dfrac{8 \times 5 + 1}{1 \times 5} = \dfrac{41}{5}$

⑦ $15 = 2 \times 6 + 3$ （丙）

⑧ $2 \times 8 - 3 = 13$

⑨ $\dfrac{13 \times 3 + 3}{6} = 7$

⑩ $\dfrac{41 \times 2 + 8}{5 \times 2 + 1} = \dfrac{90}{11}$

⑪ $13 = 1 \times 7 + 6$ （丁）

① $67 = 8^2 + 3$

67を平方数と剰余数に分けることから計算は始まります。

平方根の近似値を求める方法に

$$\sqrt{A^2+B} \fallingdotseq A + \frac{B}{2A}$$ （アラビアの方法）

があります。久留島さんは、この方法を知っていたと思います。理由は、

$$\sqrt{67} \fallingdotseq 8 + \frac{3}{2 \times 8} = 8 + \frac{3}{16}$$

上の式の中の3と16が計算の中で何度も使われるからです。

② $\dfrac{8}{1}$

第一漸近数は①の式の中の 8^2 の8を使うことで求められます。

③ $2 \times 8 = 5 \times 3 + 1$

$2 \times 8 = 16$ を $5 \times 3 + 1$ に分解します。

実		段数		強弱の絶対値		段余
16	=	5	×	3	+	1

強弱は交互にあらわれるので絶対値だけを求めれば、計算をすすめることができます。

この式の形は、

$$8+\frac{3}{16}=\frac{131}{16}$$

$$131=8\times16+3$$

$$16=5\times3+1$$

ユークリッド互除法を使うことで作ることができます。

③ $2\times8=5\times3+1$

⑦ $15=2\times6+3$

⑪ $13=1\times7+6$

この計算は段数を決定する部分で漸近分数を作るために重要です。

段数		8	5	2	1	1
分子	1	8	41	90	131	221
分母	0	1	5	11	16	27
強弱		弱3	強6	弱7	強9	弱2

④ $2\times8-1=15$

⑧ $2\times8-3=13$

実を決定する計算です。

$8+\frac{3}{16}$ の16を使います。

実＝（2×8＝16）－（一段上の段余）

⑤ $\frac{15\times1+3}{3}=6$

⑨ $\frac{13\times3+3}{6}=7$

強弱を決定する計算です。

$8+\frac{3}{16}$ の3を使います。

	強弱	実	段余	原強弱
甲	原3	16		
乙	強6	15	1	+3
丙	弱7	13	3	+3
丁	強9	10	6	+3
戊	弱2	15	1	+3
己	強9	15	1	+3

$3 \times 6 = 18 = 15 \times 1 + 3$
$6 \times 7 = 42 = 13 \times 3 + 3$
$7 \times 9 = 63 = 10 \times 6 + 3$
$9 \times 2 = 18 = 15 \times 1 + 3$

式を変形することで⑤⑨の計算方法が決定できます。

⑥ $\dfrac{8+5+1}{1 \times 5} = \dfrac{41}{5}$

⑩ $\dfrac{41 \times 2 + 8}{5 \times 2 + 1} = \dfrac{90}{11}$

第二，第三漸近数を求める計算です。段数を使います。

通分をすることなく連分数を分数に直す計算方法です。

$$\sqrt{67} = 8 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 +}}}$$

一般形を示します。

$$\sqrt{67} = \boxed{8} + \cfrac{3}{16 + \cfrac{3}{16 +}}$$

$3/16$ $\qquad$ $3/16$

$\dfrac{1}{0} \quad \boxed{8}/1 \quad \dfrac{131}{16} \quad \dfrac{2120}{259}$

$8 \times 3 + 131 \times 16 = 2120$
$1 \times 3 + 16 \times 16 = 259$

$\sqrt{67} = 8 + (5, 2, 1 \cdots$

$1/5 \quad 1/2 \quad 1/1$

$\dfrac{1}{0} \quad \dfrac{8}{1} \quad \dfrac{41}{5} \quad \dfrac{90}{11} \quad \dfrac{131}{16}$

$1 \times 1 + 8 \times 5 = 41$
$0 \times 1 + 1 \times 5 = 5$

分子は1と決まっていますから分母だけの表示になります。

久留島さんは、強9ではさまれた成弱2を使い、

$$\frac{221}{27} \text{ から } \frac{48842}{5967}$$

を求めています。

近似分数の精度を良くする方法を利用したものです。

$$\frac{221}{27} + \frac{2}{2\times221\times27}$$

$$= \frac{221}{27} + \frac{1}{221\times27} = \frac{221^2+1}{221\times27}$$

$$\frac{48842}{5967} - \frac{1}{2\times48842\times5967}$$

(強1)を利用した式で

精度は2倍になります。

8.185352771872450

$\sqrt{67}$で $\dfrac{48842}{5967}$

の分数は、$(分子)^2 - 67\times分母 = 1$ (強1)

となる最小の分数でペル方程式の最小解でもあります。強弱が1の場合は、平方根の近似値を求める計算をする場合、もっとも効率が良くなります。

この分数にたどりつくために、小数と分数を使う方法があります。

小数を使う方法は、開平法を使って、$\sqrt{67}$を求めます。次に、ユークリッド互除法の方法を利用します。整数部を引き、残りの逆数を求める計算をくり返します。

整数部分を調べると

8, 5, 2, 1, 1, 7, 1, 1, 2, 5, 16, 5, 2, 1, 1, 7 ....

(ア) 8 → 16 = 8 × 2

(イ) (5 — 16) をくり返す

(ウ) 8 - 5 - 2 - 1 - 1 ⌒ 7

16 - 5 - 2 - 1 - 1 ⌒

の性質をもつことがわかります。

計算を式を使って表現しようとすると、

$$\sqrt{67} = 8 + \sqrt{67} - 8$$

と変形する必要のあることがわかります。同時に $\sqrt{67}$ の小数部を、ε におきかえることができることもわかります。小数部分は計算をする必要がありません。

$$\frac{16+\varepsilon}{3} = 5 + \frac{\varepsilon+1}{3}$$

$$\frac{15+\varepsilon}{6} = 2 + \frac{\varepsilon+3}{6}$$

$$\frac{13+\varepsilon}{7} = 1 + \frac{\varepsilon+6}{7}$$

③ $2 \times 8 = 5 \times 3 + 1$

⑦ $15 = 2 \times 6 + 3$

⑪ $13 = 1 \times 7 + 6$

の式と対応していることがわかります。

分数を使って、強1の分数を求めるためには、ラファエル・ボンベリさんの考えた簡便形の連分数を使い、ユークリッド互除法を使って、級数を求め近似分数を求めることになります。

$$67 = 8^2 + 3$$

$$\sqrt{67} = 8 + \cfrac{3}{16 + \cfrac{3}{16 +}}$$

		3/8	3/8	3/8
$\frac{1}{0}$	$\frac{8}{1}$	$\frac{131}{16}$	$\frac{2120}{259}$	$\frac{34313}{4192}$
強	弱	強	弱	強
1	3	9	27	81

$$\frac{34313}{4192} - \frac{81}{2 \times 34313 \times 4192}$$

$$\begin{array}{r} 8.185353053435115 \\ -\ 0.00000028156266 \\ \hline 8.185352771872455 \end{array}$$

$\frac{131}{16}$ $\quad 131 = 8 \times 16 + 3$

$\quad\quad\quad 16 = 5 \times 3 + 1$

$\frac{2120}{259}$ $\quad 2120 = 8 \times 259 + 48$

$\quad\quad\quad 259 = 5 \times 48 + 19$

$\quad\quad\quad 48 = 2 \times 19 + 10$

$\quad\quad\quad 19 = 1 \times 10 + 9$

$\quad\quad\quad 10 = 1 \times 9 + 1$

$$16 = 5 \times 3 + 1$$
$$= 2 \times 6 +$$
$$= 1 \times 7 +$$
$$10 = 1 \times 9 + 1$$

段数と強弱を補なっても、実と段余に空白があります。

久留島さんも「平方零約解」を書いた安島直円さんもすぐれた方です。私には、小数と分数という異なる方法による研究の両方を知

ることの方がわかりが良いように思います。

$\sqrt{67}$ の場合は、$\frac{2120}{259}$ を使って $10 = 1 \times 9 + 1$ を見つけることができました。$\sqrt{19}$ の場合では、

$\frac{292}{67} \longrightarrow$ $19 = 3 \times 5 + 4$

$\quad\quad\quad\quad 5 = 1 \times 4 + 1$

となりうまくいきません。$A^2 + B$ として、AとBの差が大きく、Bの小さい時しかうまくいかないからです。

$52 = 7^2 + 3$ の場合はうまくいきました。久留島さんは、なぜ $\sqrt{67}$ を例としてとりあげたのでしょうか。61でも73でもありません。もしよろしければ、御意見をお知らせ下さい。