

武田 利一様

2019.1.13

林 邦英

おいそがしい日々をすごされていらっしゃると思います。
寒い日が続きます。お体には気をつけて下さい。

2019年なので $\sqrt{19}$ をテーマにしました。
味付けが偏らないように注意しました。

√19の観察

2019.1.13

林 和英

12桁の電卓を使い、ユークリッド互除法の分析方法を√19を調べます。

整数部分を引き、逆数を求めます。これをくりかえします。

4. 2, 1, 3, 1, 2, 8,

2, 1, 3, 1, 2, 8,

と(2, 1, 3, 1, 2, 8)の数字がくりかえされることがわかります。

p.1-p.2では、電卓の数値を式を使って表現します。

$\sqrt{19} = 4 + \sqrt{19} - 4$ という形に変形する必要があることがわかります。

p.3-p.4では、正則連分数による表記方法です。 $\sqrt{19} = 4 + \varepsilon$ と小数部分をεにおきかえます。

右のように変形することと、
$$\sqrt{19} = 4 + \varepsilon = 4 + \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}$$

連分数の形がわかりやすくなります。北海道の加藤秀隆さんに教えていただきました。

この計算を観察すると、「数の世界-整数論への道」(和田秀男著)に書かれてある計算方法とたどりつくことができます。

第8章ペル方程式には、√19の例が示されています。

$k, \sim k_5$

2, 1, 3, 1, 2

$a, \sim a_6$

4, 2, 3, 3, 2, 4

$b, \sim b_6$

1, 3, 5, 2, 5, 3, 1

3>の数値を利用し、対称を利用するために

$a_3 = a_4 = 3$ を目印にします。

$$13 + 3\sqrt{19} \rightarrow 170 + 39\sqrt{19}$$

を求めます。

p.5-p.6の久留島義太士の平方零約術と良く似ています。

開平方法で√19を求めました。主計算と副計算に分割することと、効率的に計算ができるように工夫されていることを確かめることができます。

電卓の数値を式を使って表現する

$$\sqrt{19} = \textcircled{4} + \sqrt{19} - 4$$

$$\frac{1}{\sqrt{19}-4} = \frac{\sqrt{19}+4}{\textcircled{3}} = \frac{\sqrt{19}-4+8}{3} = \textcircled{2} + \frac{\sqrt{19}-2}{3}$$

$$\frac{3}{\sqrt{19}-2} = \frac{3(\sqrt{19}+2)}{15} = \frac{\sqrt{19}+2}{\textcircled{5}} = \frac{\sqrt{19}-4+6}{5} = \textcircled{1} + \frac{\sqrt{19}-3}{5}$$

$$\frac{5}{\sqrt{19}-3} = \frac{5(\sqrt{19}+3)}{10} = \frac{\sqrt{19}+3}{\textcircled{2}} = \frac{\sqrt{19}-4+7}{2} = \textcircled{3} + \frac{\sqrt{19}-3}{2}$$

$$\frac{2}{\sqrt{19}-3} = \frac{2(\sqrt{19}+3)}{10} = \frac{\sqrt{19}+3}{\textcircled{5}} = \frac{\sqrt{19}-4+7}{5} = \textcircled{1} + \frac{\sqrt{19}-2}{5}$$

$$\frac{5}{\sqrt{19}-2} = \frac{5(\sqrt{19}+2)}{15} = \frac{\sqrt{19}+2}{\textcircled{3}} = \frac{\sqrt{19}-4+6}{3}$$

$$= \textcircled{2} + \frac{\sqrt{19}-4}{3}$$

$$\frac{3}{\sqrt{19}-4} = \frac{3(\sqrt{19}+4)}{3} = \frac{\sqrt{19}+4}{\textcircled{1}} = \frac{\sqrt{19}-4+8}{1} = \textcircled{8} + \frac{\sqrt{19}-4}{1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{19}-4} =$$

$$2 + \frac{\sqrt{19}-2}{3} = 2.78629964784$$

$$1 + \frac{\sqrt{19}-3}{5} = 1.2717797887$$

$$3 + \frac{\sqrt{19}-3}{2} = 3.67944947177$$

$$1 + \frac{\sqrt{19}-2}{5} = 1.4717797887$$

$$2 + \frac{\sqrt{19}-4}{3} = 2.11963298118$$

$$8 + \frac{\sqrt{19}-4}{1} = 8.35889894354$$

$$\sqrt{19} = 4 + \varepsilon \quad \varepsilon = \sqrt{19} - 4 \quad \text{正則連分數}$$

$$\sqrt{19} = \textcircled{4} + \varepsilon = 4 + \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{19} - 4} = \frac{\sqrt{19} + 4}{19 - 16} = \frac{\sqrt{19} + 4}{\textcircled{3}}$$

$$= \frac{4 + \varepsilon + 4}{3} = \frac{8 + \varepsilon}{3} = \textcircled{2} + \frac{2 + \varepsilon}{3} = 2 + \frac{1}{\frac{3}{2 + \varepsilon}}$$

$$\frac{3}{2 + \varepsilon} = \frac{3}{2 + \sqrt{19} - 4} = \frac{3}{\sqrt{19} - 2}$$

$$= \frac{3(\sqrt{19} + 2)}{19 - 4} = \frac{3(\sqrt{19} + 2)}{15} = \frac{\sqrt{19} + 2}{\textcircled{5}} = \frac{4 + \varepsilon + 2}{5}$$

$$= \frac{6 + \varepsilon}{5} = \textcircled{1} + \frac{1 + \varepsilon}{5} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{1 + \varepsilon}}$$

$$\frac{5}{1 + \varepsilon} = \frac{5}{1 + \sqrt{19} - 4} = \frac{5}{\sqrt{19} - 3} = \frac{5(\sqrt{19} + 3)}{19 - 9}$$

$$= \frac{5(\sqrt{19} + 3)}{10} = \frac{\sqrt{19} + 3}{\textcircled{2}} = \frac{4 + \varepsilon + 3}{2} = \frac{7 + \varepsilon}{2}$$

$$= \textcircled{3} + \frac{1 + \varepsilon}{2} = 3 + \frac{1}{\frac{2}{1 + \varepsilon}}$$

$$\frac{2}{1 + \varepsilon} = \frac{2}{1 + \sqrt{19} - 4} = \frac{2}{\sqrt{19} - 3} = \frac{2(\sqrt{19} + 3)}{19 - 9}$$

$$= \frac{2(\sqrt{19} + 3)}{10} = \frac{\sqrt{19} + 3}{\textcircled{5}} = \frac{4 + \varepsilon + 3}{5}$$

$$= \frac{7 + \varepsilon}{5} = \textcircled{1} + \frac{2 + \varepsilon}{5} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{2 + \varepsilon}}$$

$$\frac{5}{2 + \varepsilon} = \frac{5}{2 + \sqrt{19} - 4} = \frac{5}{\sqrt{19} - 2} = \frac{5(\sqrt{19} + 2)}{19 - 4}$$

$$= \frac{5(\sqrt{19} + 2)}{15} = \frac{\sqrt{19} + 2}{\textcircled{3}} = \frac{4 + \varepsilon + 2}{3} = \frac{6 + \varepsilon}{3}$$

$$= \textcircled{2} + \frac{\varepsilon}{3} = 2 + \frac{1}{\frac{3}{\varepsilon}}$$

$$\frac{3}{\varepsilon} = \frac{3}{\sqrt{19} - 4} = \frac{3(\sqrt{19} + 4)}{19 - 16} = \frac{3(\sqrt{19} + 4)}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{19} + 4}{\textcircled{1}} = \frac{4 + \varepsilon + 4}{1} = \textcircled{8} + \frac{\varepsilon}{1} = 8 + \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} =$$

平方零約術

甲 $19 = 4^2 + 3$

$\frac{4}{1}$ 第1漸近数

乙 $2 \times 4 = 2 \times 3 + 2$

$2 \times 4 - 2 = 6$ 乙段実

$\frac{6 \times 2 + 3}{3} = 5$ 乙強数

$\frac{4 \times 2 + 1}{1 \times 2} = \frac{9}{2}$ 第2漸近数

丙 $6 = 1 \times 5 + 1$

$2 \times 4 - 1 = 7$ 丙段実

$\frac{7 \times 1 + 3}{5} = 2$ 丙弱数

$\frac{9 \times 1 + 4}{2 \times 1 + 1} = \frac{13}{3}$ 第3漸近数

丁 $7 = 3 \times 2 + 1$

$2 \times 4 - 1 = 7$ 丁段実

分子 分母 強弱 実 段数 段余

甲 1 4 原3 8

乙 2 9 強5 6 2 2

丙 3 13 弱2 7 1 1

丁 11 48 強5 7 3 1

$\frac{7 \times 1 + 3}{2} = 5$ 丁強数

$\frac{13 \times 3 + 9}{3 \times 3 + 2} = \frac{48}{11}$ 第4漸近数

丙 弱2を使う (強5にはさまれている)

$\frac{13 \times 2}{2} = 13$

$13 \times 13 + 1 = 170$ 強分子

$3 \times 13 = 39$ 強分母

$\frac{13}{3} + \frac{2}{2 \times 13 \times 3} = \frac{13 \times 13 + 1}{3 \times 13}$

$$\frac{170555}{39128} - \frac{729}{2 \times 170555 \times 39128}$$

$$19 = 4^2 + 3 \quad \sqrt{19} = 4 + \frac{3}{8} \text{ 型連分数}$$

$$\frac{3}{8} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{3}{8}$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{0} \quad \frac{4}{1} \quad \frac{35}{8} \quad \frac{292}{67} \quad \frac{2441}{560} \quad \frac{20404}{4681} \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{3}{8} \left(\begin{array}{l} 2441 \times 3 + 20404 \times 8 = 170555 \\ 560 \times 3 + 4681 \times 8 = 39128 \end{array} \right) \quad 729$$

$$170555 = 4 \times 39128 + 14043$$

$$39128 = 2 \times 14043 + 11042$$

$$14043 = 1 \times 11042 + 3001$$

$$11042 = 3 \times 3001 + 2039$$

$$3001 = 1 \times 2039 + 962$$

$$2039 = 2 \times 962 + 115$$

$$962 = 8 \times 115 + 42$$

$$115 = 2 \times 42 + 31 \quad 11 = 1 \times 9 + 2$$

$$42 = 1 \times 31 + 11 \quad 9 = 4 \times 2 + 1$$

$$31 = 2 \times 11 + 9 \quad 2 = 2 \times 1 + 0$$

7

$$\sqrt{19} = 4 + (2, 1, 3, 1, 2, 8)_n \text{ 型連分数}$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{0} \quad \frac{4}{1} \quad \frac{9}{2} \quad \frac{13}{3} \quad \frac{48}{11} \quad \frac{61}{14} \quad \frac{170}{39}$$

$$(\text{分子})^2 - 19 \times (\text{分母})^2$$

$$\textcircled{1} \textcircled{-3} \textcircled{5} \textcircled{-2} \textcircled{5} \textcircled{-3} \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{2} \begin{cases} 1 \times 1 + 4 \times 2 = 9 \\ 0 \times 1 + 1 \times 2 = 2 \end{cases}$$

$$170 \times 2 = 340$$

$$\frac{1}{1} \begin{cases} 4 \times 1 + 9 \times 1 = 13 \\ 1 \times 1 + 2 \times 1 = 3 \end{cases}$$

$$170 \times 340 - 1 = 57799$$

$$39 \times 340 = 13260$$

$$\frac{1}{3} \begin{cases} 9 \times 1 + 13 \times 3 = 48 \\ 2 \times 1 + 3 \times 3 = 11 \end{cases}$$

$$\frac{170}{39} - \frac{1}{2 \times 170 \times 39}$$

$$\frac{1}{1} \begin{cases} 13 \times 1 + 48 \times 1 = 61 \\ 3 \times 1 + 11 \times 1 = 14 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} \begin{cases} 48 \times 1 + 61 \times 2 = 170 \\ 11 \times 1 + 14 \times 2 = 39 \end{cases}$$

8

開平法 で $\sqrt{19}$ を求める

$\begin{array}{r} 4 \text{ (X)} \\ \oplus 4 \\ \hline 83 \text{ (X)} \\ \oplus 3 \\ \hline 865 \text{ (X)} \\ \oplus 5 \\ \hline 8708 \text{ (X)} \\ \oplus 8 \\ \hline 87168 \text{ (X)} \\ \oplus 8 \\ \hline 871769 \text{ (X)} \\ \oplus 9 \\ \hline 8717788 \text{ (X)} \\ \oplus 8 \\ \hline 87177969 \text{ (X)} \\ \oplus 9 \\ \hline 871779784 \text{ (X)} \\ \oplus 4 \\ \hline 871779788 \end{array}$	$\begin{array}{r} \sqrt{19} \\ -16 \\ \hline 300 \\ -249 \\ \hline 5100 \\ -4325 \\ \hline 77500 \\ -69664 \\ \hline 783600 \\ -697344 \\ \hline 8625600 \\ -7845921 \\ \hline 77967900 \\ -69742304 \\ \hline 822559600 \\ -784601721 \\ \hline 37957879 \\ -34871191 \\ \hline 3086687 \end{array}$	<p style="text-align: center;">4 . 3 5 8 8 9 8 9</p>
--	---	--

$\sqrt{19}$ の観察 (12桁の電卓を使って)

$19 \sqrt{\quad}$		$\textcircled{4}$.	35889894354
$- 4 =$		0.	35889894354
$\div =$		$\textcircled{2}$.	78629964785
$- 2 =$		0.	78629964785
$\div =$		$\textcircled{1}$.	2717797887
$- 1 =$		0.	2717797887
$\div =$		$\textcircled{3}$.	67944947188
$- 3 =$		0.	67944947188
$\div =$		$\textcircled{1}$.	47177978847
$- 1 =$		0.	47177978847
$\div =$		$\textcircled{2}$.	11963298225
$- 2 =$		0.	11963298225
$\div =$		$\textcircled{8}$.	35889886879
$- 8 =$		0.	35889886879