武田 利一 様

2018.7.6

林 邦英

割り算の世界を循環小数と剰余数列という異なる視点を組み合わせて調べました。

江戸時代の山路主住さんの循環小数の研究は、後世に伝えるべきものであると確信しました。平山諦さんの書かれた「学術を中心とした和算史上の人々」(ちくま学芸文庫)より引用します。

P.281 (2) 素数の節位数 ―(A)

「2および5以外の素数の節位数は、その素数から1を引いた数の約数になる」

(例) $\frac{1}{7}, \frac{1}{17}, \frac{1}{11}, \frac{1}{41}, \frac{1}{239}$

P.282 (3) 素数冪の節位数 ―(B)

「2と5以外の素数をPとし、$\frac{1}{p^n}$ の節位数は、(Pの節位数)$\times p^{n-1}$

(例) 7^2, 11^2

P. 283（4）合成数の節位数 −（C）
「最小公倍数」
（例）$\dfrac{1}{77}$（7×11）$\dfrac{1}{299}$（13×23）

山路雄さんは、十進法の1÷Nの表を作って観察しました。レポート（20.18.9.21）では、Nが1から525までの表をのせました。
この表で最初に目にとまるのは、割り切れる時（有限小数）と割り切れない時のちがいではないかと思います。
割り切れる時は、Nの成分が、2と5の時だけです。また割り切れる場合の桁数が何によって決まるのかもわかります。
この表では、循環部分を[・　・]を使って省略してありますが、元になる数表を使うと循環する部分としない部分という分け方のもつ意味がもっとよくわかります。
Nを素数に分解して、2と5を含むかどう

かがどのようなちがいとなって数表にあらわれるのか。ここから始まると思います。

　山路さんは、(A)、(B)、(C)の3つの規則を示しました。少くとも$7^3 = 343$以上の表を作る必要があります。

1÷Nの循環節の長さ(ℓ)十進法

N	ℓ		
7	6		(B)
49	42	= 6×7	
342	294	= 6×7×7	
17	16		(C)
19	18		
323	144	16と18の最小公倍数	

(A)については、「進法を変化させた時の1÷Nの循環小数の長さ(Nは素数)レポート2018.4.21」を観察することでさらにはっきりとします。進法を変化させても、素数−1の約数になっています。この表からはさらに多くのことがわかります。

3以上の素数には、〔2-$(\overline{0})$-1〕という部分があることです。〔-(0)〕があるのは割り切れるということです。上下には、2と1がついています。これは進法そのものの性質です。10進法では、$10-1=9=3^2$となるので、3を分母の要素に含むと変則型になります。(B)の例外($1\div3$と$1\div3^2$のどちらも循環節が(1桁)になる原因です。

これをさらにはっきりとさせるために41進法で調べました。理由は、$42=41+1$と$40=41-1$には約数が多いことです。十進法とくらべるために素数41を使いました。41進法では(B)の別の例外もあらわれます。29と29^2の時、どちらも4桁になります。これは、ペル方程式を使うことで説明することができます。

41進法での質問

① 混循環になる最小のNは、

② 循環節が2桁の最大のNは、

③ 循環節が4桁の最大のNは、

「進法を変化させた時の1÷N」の表の残りの部分を半分におりたたむと、対称と補完があらわれます。
「5型の素数　7型の素数」（2018．4．22）の表を作りました。N－1を素因数分解した時の2の数によって簡単に説明できました。これも進法それ自身の性質ではと思います。
なぜ、山路主任さんの研究を後世に伝えるべきかについて、「（フィボ・トリボ）ナッチ式剰余数列の周期」の表を使って説明します。
（A）について．
「素数－1の約数」は、素数^2，素数^{3}に拡張されてきき続けています。例外はありますが私は基本的な性質だと思います。
（B），（C）について．
modが2から10までのわずかなデータですが、きれいにおさまっています。
（B）には、十進法で1÷487と÷487^{2}という例外があります。これは私にはわかり

ませんn。だからといって、(A)、(B)、(C)の剰余数列に関する基本的な性質をすてるのは、もったいないと思います。循環小数とは異なる剰余数列においても成立しているからです。

カール・フリードリヒ・ガウス先生は、「数学は科学の女王であり、数論は数学の女王である。」ということばを残しました。

循環小数，平方根は、有理数と無理数を考える上で基本的なテーマだと思います。

$1 \div 7 = 0.142857\ 1428 \cdots$

$\sqrt{7} = 2.64575\ 13110 \cdots$

のちがいは何でしょう。

久留島義太さんの平方零約術もすぐれた研究です。平方根に関する分散したレポートが整理できたらと考えています。

平山さんの書かれた本のP.231より引用します。

第3章　計算を友として

数学には多少の計算を伴わないものはない。わが国の和算は自然科学を背景としなかった。だから、しぜんに理論にはうとくなり、直観に走り、計算を重んずるようになった。直観の力のおよばないところは、すぐに計算で確かめようとしたことは自然の勢いであった。その結果、計算が万能の力を発揮した。

このことは和算の欠点でもあり、長所でもあった。日本人の計算力にすぐれた点は大いに延ばすべきである。

50年以上前に書かれたものです。

三上義夫さんの「文化史上より見たる日本の数学」（岩波文庫）P.89〜P.92

「十七 帰納的推論」と共通するものを感じました。