武田　利一　様

2018.1.14

林　邦英

寒い日が続きます。お体に気をつけてください。

算数・数学教育において円周率は基本的なテーマの1つだと思います。具体的な数値は約3.14ですが、近似分数でおぼえることも1つの方法かと思っています。

$$\frac{22}{7} = 3.142857$$

$$\frac{355}{113} = 3.1415929$$

私自身の学習をふり返ると大きく3つの時期に分かれます。

アルキメデスさんの方法を知ったのは小学生の時でした。

内接と外接の1:1の平均を中学生の時にやりました。1:1の平均が辺を2倍にした時の外接に近づくことに気がついたのは、

30才ぐらいでした。残念ながら、数表を作って、数値分析をしませんでした。

内接と外接の2：1の加重平均を行ったのは、40才ぐらいの時でした。残念なことに角度を変化させてきちんと調べませんでした。

内接と外接の3：1の加重平均を行ったのは、50代になってからでした。辺の数を2倍にした時に内接に近づくことがわかった時はおどろきました。（埼玉県の方に感謝）

ヒッパルコスさんが小さな角の弦を弧で近似したことを知り、いったいどれくらいの誤差があるのかをtanで調べ、角度が半分になった時、誤差が約8分の1になる事実のであうことができました。（新潟県の方に感謝）

昨年の1月に作図による実験をしました。内接と外接を2：1の比重で平均すると円弧に近づくことを説明する場合に役に立つことがわかりました。数表の分析と組み合わせてみました。もしよろしければ、御意見をお知らせ下さい。

円周率について

林　邦英

アルキメデスさんは円に内接・外接する正多角形の周長を使って円周の長さを求めました。正96角形を使い

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} \qquad \pi \fallingdotseq 3.14$$

を求めました。

「πの歴史」ペートル・ベックマン著（ちくま学芸文庫（2006年）のP.188に、「アルキメデスが『円の測定について』を著わしてからほぼ1900年もたった頃になって、人々は、円に内接，外接する多角形の比較からπをきめるほかに、πへの近道はないものかと考えだした.」と2人のオランダの数学者を紹介しています。

インターネットで調べました。

「収束の加速法の歴史―17世紀ヨーロッパと日本の加速法―」　長田直樹著

（kurims. kyoto-u. ac. jp）

「アルキメデスおよびクレーンの方法を乗り越えたのはスネルである。」と書かれ

$$\frac{3\sin\theta}{2+\cos\theta} < \theta < 2\sin\frac{\theta}{3} + \tan\frac{\theta}{3}$$

の式が紹介されています。

「数理塾」(math-lab.main.jp)の

数理の部屋→円周率πの数値計算→(2)の

「近似式の改良」で

$$(2\sin\theta+\tan\theta)/3 > \theta > 3\sin\theta/(2+\cos\theta)$$

が紹介されています。

「πの歴史」のP. 146で、ニコラウス・クザーヌスさん(1401－1464)が紹介されています。

$$弧\,\theta \approx \frac{3\sin\theta}{2+\cos\theta}$$

の式が紹介されています。私はtanの半角の公式の変形から説明できると思っています。

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

$$弧\,\theta \approx \frac{2\sin\theta + \tan\theta}{3}$$

はいつどこで発見されたのか、とても気になります。

村田全さんの訳された「改訳　数学の歩み　マルセル・ボル著」（白水社　，９６７）のP.５５に「第５図　アルキメデスの方法による逐次近似値」があります。この数表には、「両者の平均」がついています。

長田さんの「収速の加速法の歴史」の中で鎌田俊清さんが、外周と内周の均周を求めたことが書かれています。

私は、外周と内周の両者の平均が出発点であったと確信しました。だれもがまっ先に考える単純な方法だからです。

アルキメデスの方法による逐次近似値の数表を作り観察しました。

同じ数値がみつかります。

3．14161017７

3．141597034

ここから始まります。両者の平均は、一段下の外接で多角形の周長と同じです。ところが数表の上へ行くほど、差は大きくなっていきます。しかし差の比を調べることで、安心を与えられます。

辺の数が2倍になると差は約16分の1になることがわかります。角度が小さくなると何かに近づいてゆくことの説明はむつかしかったと思います。数値分析において「差」と「比」という異なった方法をむすびつけることは、大切だとあらためて思いました。

内接と外接の1：1の平均では外接になってしまい円周にはなりません。

作図による実験をしました。内接，円弧，外接の関係を調べてみました。角度が小さくなると円弧の長さが内接2，外接1の加重平均に近づくことを確かめることができます。

内接3，外接1の加重平均をするかどうかは，次へのステップをできるかどうかの分かれ道です。

内接3，外接1の加重平均は一段下の内接で多角形の周長と関係していることがわかります。角度が半分になった時、弧と弦の差が約8分の1になる事実の発見で、

$$弧\theta \approx \frac{2\sin\theta + \tan\theta}{3}$$

が説明できたと思います。

円周率の計算だけでなく、三角関数の研究にとっても大きな一歩だったと思います。

アルキメデスの方法による逐次近似値

辺の数	内接正多角形の周長	外接正多角形の周長	両者の平均	
3	2.598076211	5.196152423	3.897114317	
6	3.000000000	3.464101615	3.232050807	
12	3.105828541	3.215390309	3.160609425	
24	3.132628613	3.159659942	3.146144277	
			58062	
48	3.139350203	3.146086215	3.142718209	16
			3609	
96	3.141031951	3.142714600	3.141873275	16
			225	
192	3.141452472	3.141873050	3.141662761	16
			14	
384	3.141557608	3.141662747	3.141610177	
			0	
768	3.141583892	3.141610177	3.141597034	
			0	
1536	3.141590463	3.141597034	3.141593748	

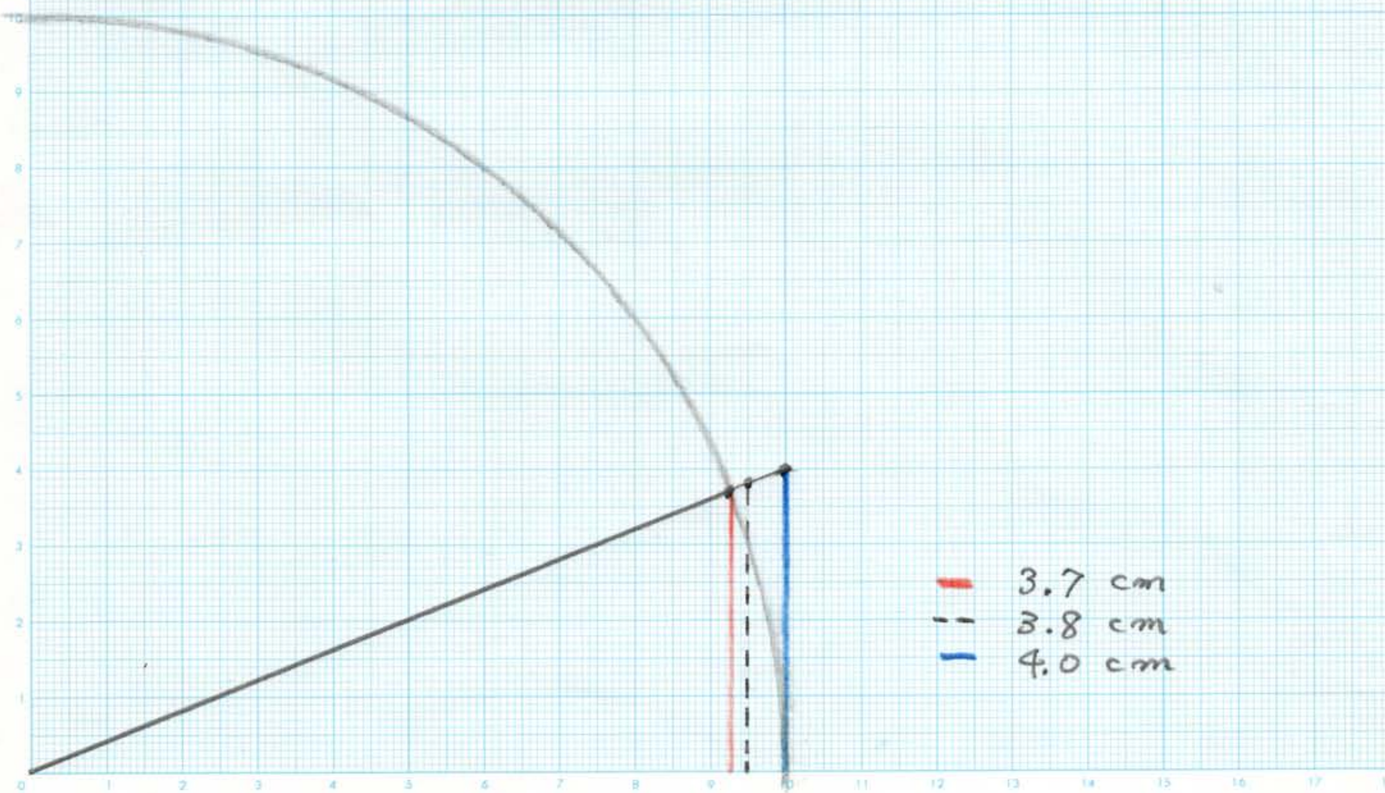
円周率に関する簡単な実験

アルキメデスさんは内接正多角形の周と外接正多角形の周の長さを使って円周の長さを求める方法を示しました。正96角形の周の長さを使い

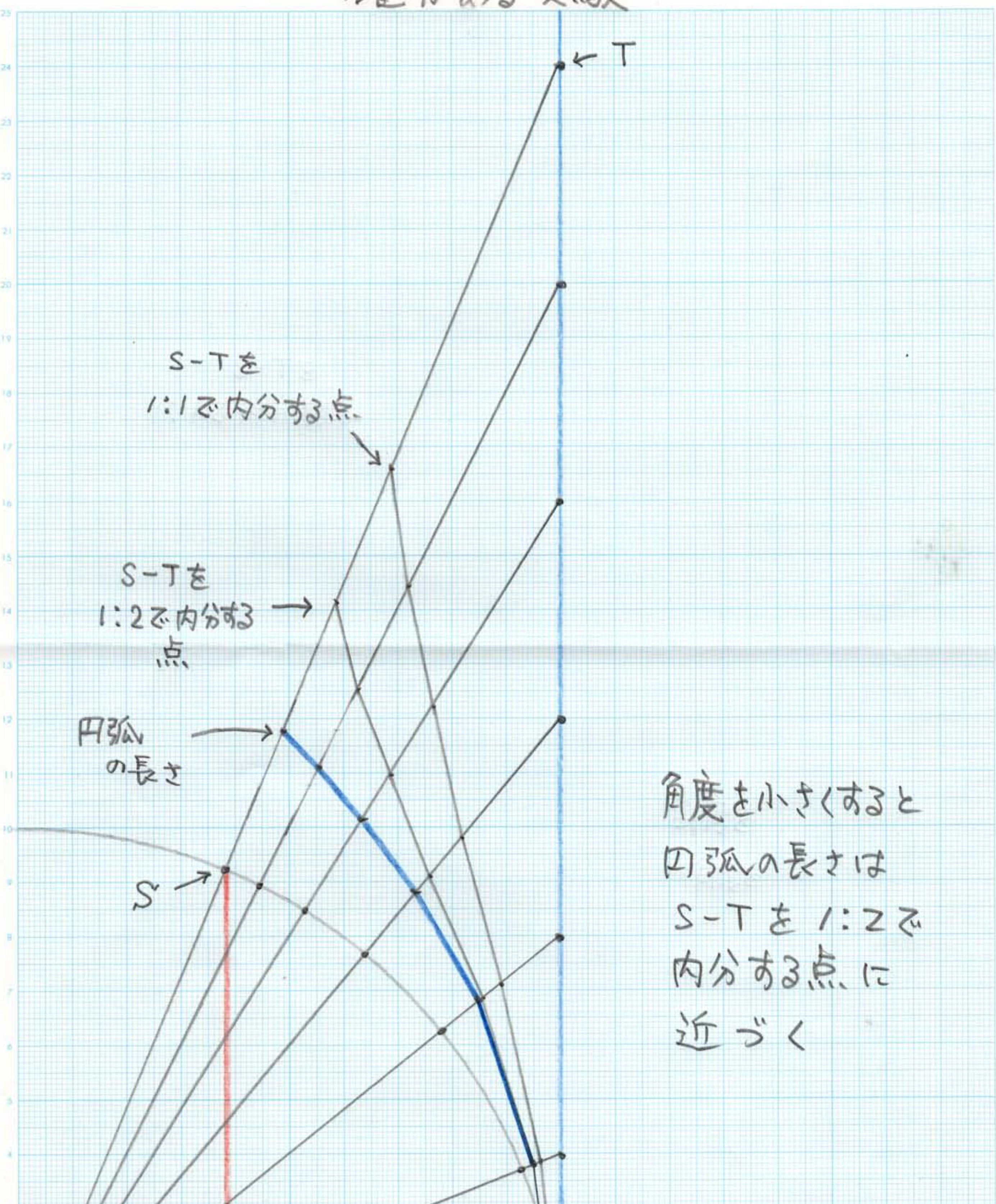
$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

を求めました。

内接・外接の各辺の半分と円弧の長さを調べました。
プラスチックの定規をまげて円弧を測り点線をつけ加えました。
赤 ー 点線 ー 青 の間の長さを調べました。
約 1：2 であることがわかりました。角度を変化させて調べてみました。S－Tを 1：1 で内分する点と 1：2 で内分する点をつけ加えました。角度が小さくなると円弧の長さは 1：2 で内分する点に近づくことを確かめることができました。



角度を変化させた時の sin，円弧，tan の関係を確かめる実験



角度を小さくすると
円弧の長さは
S-Tを 1:2で
内分する点に
近づく

円に内接，外接する正多角形の周長

辺の数	内接正多角形の周長	外接正多角形の周長
3	2.598076211	5.196152423
6	3.000000000	3.464101615
12	3.105828541	3.215390309
24	3.132628613	3.159659942
48	3.139350203	3.146086215
96	3.141031951	3.142714600
192	3.141452472	3.141873050
384	3.141557608	3.141662747
768	3.141583892	3.141610177
1536	3.141590463	3.141597034

内接と外接の比重を変えた平均

辺の数	内接3　外接1　あ	内接2　外接1　い	内接1　外接1　う
3	3.247595264	3.464101615	3.897114317
6	3.116025403	3.154700538	3.232050807
12	3.133218983	3.142349130	3.160609425
24	3.139386445	3.141639056	3.146144277
48	3.141034206	3.141595540	3.142718209
96	3.141452613	3.141592834	3.141873275
192	3.141557616	3.141592664	3.141662761
384	3.141583892	3.141592654	3.141610177
768	3.141590463	3.141592653	3.141597034
1536	3.141592105	3.141592653	3.141593748

	A	B	C
辺の数	あと一段下の内接との差	いと π との差	うと一段下の外接との差
3	247595264	322508962	433012702
6	10196862	13107885	16660498
12	590370	756477	949483
24	36242	46403	58062
48	2255	2887	3609
96	141	181	225
192	8	11	14
384	0	1	0
768	0	0	0
1536		0	

辺の数	Aの差の比	Bの差の比	Cの差の比
3	24.28	24.60	25.99
6	17.27	17.32	17.54
12	16.28	16.30	16.35
24	16.07	16.07	16.08
48	15.99	15.95	16.04
96			
192			
384			
768			
1536			