武田 利一 様

2016.5.6

林 邦英

新緑の美しい季節となりました。連休中は瑞穂公園で行なわれた高校生の陸上部の大会を見学させていただきました。次の世代のために私には何ができるのだろうかと、あらためて考えさせられました。

最近のレポートを同封します。武田さん用にと思い冊子の形にしました。

今回あらたにつけ加えたのは「精度のちがう数値を使った分析」のP.3－P.4の部分です。

$99^2=9801$を使った場合「差」と「比」の場合では、数値が異なりました。また、iPhoneの16桁の計算機を使って平均すると、たいへんに良い数値であることがわかりました。

$9^2=81$を使って$\sqrt{80}$を求める計算をすることがきっかけとなって、理由がわかりま

した。限られた有効桁数ですので、精度の悪い数値の方が、分析する上で役に立ちます。

① $\sqrt{80} \fallingdotseq 9$

② (差) $\underline{8.944}4444445$

(比) $\underline{8.944}0993 7883$

③ $\underline{8.9442719}116$

$\sqrt{80}$ $8.9442719 0999$

精度が「2倍」になっています。ニュートン法ではと思いました。

$$\left(\underbrace{\frac{161}{18}}_{(差)} + \underbrace{\frac{18}{161} \times 80}_{(比)}\right) \div 2$$

となることを確かめました。

Nを使って $\sqrt{N^2-1}$ を求める場合に使うことができる方法であることがわかりました。

平方数の表（Nは90から100）の表を見なおしました。

$97^2 = 9409$

に気がつきました。今までは、平方数の表を見る時に、下2桁が「00」に近いものをさがしていました。もったいないことをしていたと思いました。新しい方法を知ることで、それまで使えなかったものを使うことができるようになりました。

$9409 - 1 = 9408$

$\sqrt{9408} = 56\sqrt{3}$

さっそく$\sqrt{3}$を求めてみました。

満足する数値でした。

平方数の表（Nは0から100まで）の作り方

① N^2（Nは0から10）の表

1つづ計算します。（九九を使って）

N	N^2	差を調べると	一の位
0	0	1 = 2×0+1	
1	1		1
		3 = 2×1+1	
2	4		4
		5 = 2×2+1	
3	9		9
		7 = 2×3+1	
4	16		6
		9 = 2×4+1	
5	25		5
		11 = 2×5+1	
6	36		6
		13 = 2×6+1	
7	49		9
		15 = 2×7+1	
8	64		4
		17 = 2×8+1	
9	81		1
		19 = 2×9+1	
10	100		0
		2N+1	

② N^2（Nは10から20）の表

$(N+1)^2 = N^2+2N+1$ の式を使います。

N	10	100		十以上の位		一の位	
	21				+2		+
11		121		12		1	
	23				+2		+
12		144		14		4	
	25				+2		+
13		169	+2	16		9	
	27		+1		+3		−
14		196		19		6	
	29				+3		−
15		225		22		5	
	31				+3		+
16		256		25		6	
	33				+3		+
17		289		28		9	
	35				+4		−
18		324	+3	32		4	
	37		+1		+4		−
19		361		36		1	
	39				+4		−
20		400		40		0	

③ N^2（Nは20から30）の表

N						十の位
20		40		0		
21		44	+4	1	+	4
22		48	+4	4	+	8
23	+4 +1	52	+4	9	+	2
24		57	+5	6	−	7
25		62	+5	5	−	2
26		67	+5	6	+	7
27		72	+5	9	+	2
28	+5 +1	78	+6	4	−	8
29		84	+6	1	−	4
30		90	+6	0	−	0

① 一の位について

$$(5-a)^2 = 25 - 10a + a^2$$

$$(5+a)^2 = 25 + 10a + a^2$$

$$5^2 = 25 \rightarrow 5$$

4	$(5-1)^2$	$5+1=6$	$(5+1)^2$	6
3	$(5-2)^2$	$5+4=9$	$(5+2)^2$	7
2	$(5-3)^2$	$5+9=14$	$(5+3)^2$	8
1	$(5-4)^2$	$5+16=21$	$(5+4)^2$	9

③ 十の位について

$$(25-a)^2 = 625 - 50a + a^2$$

$$(25+a)^2 = 625 + 50a + a^2$$

$26^2 - 24^2 = 100$　　$a=1$

$27^2 - 23^2 = 200$　　$a=2$

$28^2 - 22^2 = 300$　　$a=3$

No. 5

$$(50-a)^2 = 2500 - 100a + a^2$$

$$(50+a)^2 = 2500 + 100a + a^2$$

$$51^2 - 49^2 = 200 \quad a=1$$

$$52^2 - 48^2 = 400 \quad a=2$$

$$75^2 - 25^2 = 5000 \quad a=25$$

$$75^2 = 625 + 5000 = 5625$$

$$99^2 - 1^2 = 9800 \quad a=49$$

$$99^2 = 1 + 9800 = 9801$$

No. 6

④ N^2（N は 90 から 100）の表

N	a	×200	$(50-a)^2$	N^2
90	40	8000	100	8100
91	41	8200	81	8281
92	42	8400	64	8464
93	43	8600	49	8649
94	44	8800	36	8836
95	45	9000	25	9025
96	46	9200	16	9216
97	47	9400	9	9409
98	48	9600	4	9604
99	49	9800	1	9801
100	50	10000	0	10000

精度のちがう数値を使った分析

$\sqrt{2}$ の場合

平方数の表（Nは0から100）より

$14^2 = 196$

$99^2 = 9801$

の数値を使います。

精度のちがいを確かめます。

$196 \div 10^2 = 1.96$

$9801 \div 70^2 = 2.00020408163$

これより

$14 \div 10 = 1.4$

より

$99 \div 70 = 1.4\dot{1}4285\dot{7}$

の方が精度の良いことがわかります。

「差」に着目する方法

$2 - 1.96 = 0.04 = \frac{1}{25}$

$1.4 = \frac{7}{5} = \frac{98}{70}$

差は $\frac{1}{70}$

$9.9 \div 7 = \frac{99}{70}$

$\frac{1}{25} \times$「 ? 」$= \frac{1}{70}$

$\frac{1}{25} \times \frac{5}{2 \times 7} = \frac{1}{70}$

$0.04 \div 2 \div 1.4 = 0.0\dot{1}4285\dot{7}$

$99^2 = 9801$ を使って

$(9.9 - 0.01 \div 2 \div 9.9) \div 7 =$

1.41421356421

平方すると　2.00000000519

「比」に着目する方法

$2 \div 1.96 = 1.0204081632 6$

$\frac{99}{70} \div 1.4 = 1.0102040816 2$

小数部分を調べます。$\frac{1}{2}$になっています。

$2 \div 1.96 = 1.0204081632 6$

$-1 = \div 2 = +1 =$

$\times 1.4 = 1.4\dot{1}4285\dot{7}$

$99^2 = 9801$ を使って

$9801 \div 9800 = 1.0001020408 1$

$-1 = \div 2 = +1 =$

1.0000510204

$\div = \times 99 \div 70 = 1.4142135605 4$

平方すると $1.9999999948 1$

2つの方法の数値を調べます。

「差」 $2.0000000051 9$ $(+519)$

「比」 $1.9999999948 1$ (-519)

$$
\begin{array}{r}
1.4142135642 1 \\
+\ 1.4142135605 4 \\
\hline
2.8284271247 5
\end{array}
$$

$(\div 2)$ $1.4142135623 75$

$9^2 = 81 \rightarrow \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

$49^2 = 2401 \rightarrow \sqrt{2400} = 20\sqrt{6}$

$51^2 = 2601 \rightarrow \sqrt{2600} = 10\sqrt{26}$

の場合でも 2つの方法の数値を平均すると

精度が良くなりました。

(参考) $\sqrt{2}$ について

$\left(\frac{7}{5} + \frac{5}{7} \times 2\right) \div 2 = \frac{49+50}{70} = \frac{99}{70}$

$97^2 = 9409 \rightarrow \sqrt{9408} = 56\sqrt{3}$

$\log_{10} N$ を求める計算方法の三段階

① 自然数の累乗値の桁数からその対数値を求める方法（ネピア考案）

12桁の電卓を使うことで、簡単に確かめることができます。

$\log_{10} 2$ を例とします。

2× =を9回
1024なので整数部分が1桁になるように10^nで割ります。
$n=3$
1.024× =を9回
1.26なので $n=0$
これをくり返します。

仮数部12桁を求めることができました。

$\log_{10} 2$

10^m	整数部分	$\div 10^n$
1	1024	3
2	1	0
3	10	1
4	1	0
5	999	2
6	9900653834	9
7	9049795420	9
8	3684576828	9
9	461186	5
10	4352729	6
11	2441274	6
12	7519	3
13	577637651	8
14	41357562	7

② $N^m = a\times10^n$ で a が1に近くなる m, n の組み合わせをさがし、a を使って補正する方法（2.3補正）

2.3補正の方法は、精度のちがう数値を分析することで求めることができます。

$7^{510} = 1.00000093765\times10^{431}$

$7^{71} = 1.0045252 1125\times10^{60}$

$\log_{10}7 \fallingdotseq 431\div510 +$

$0.00000093765 \div 510$
$\div 2.3$

2.3補正された数値を、ユークリッド互除法を使って分析すると、a がより1に近い m と n の組み合わせを求めることができます。

$\log_{10}2$ を例とします。

$2^3 = 0.8\times10^1$
$(1\div0.8-1)\div3\div2.3$
$=0.036231 88405$ ——(A)
$1\div3-A$
$=0.297101 44928$ ——(B)
Bを使って
$0+(3, 2, 1\cdots)$

0	3	2	1
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{10}$

$2^{10} = 1.024\times10^3$
$3\div10+(1.024-1)\div10\div2.3$
$=0.3010434782 6$
$0+(3, 3, 9\cdots)$

0	3	3	9
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{28}{93}$

③ テイラー展開を利用する方法

$2^{10} = 1024 = 1.024 \times 10^{3}$

$\log_e 10 = 2.302585092\,99$

を使います。

$\log_{10} 2$

$3 \div 10 +$
$(0.024 - \frac{1}{2} \times 0.024^{2}$
$+ \frac{1}{3} \times 0.024^{3} - \frac{1}{4} \times 0.024^{4}$
$+ \frac{1}{5} \times 0.024^{5} \cdots) \div 10 \div \log_e 10$

$\log_e 2$

$3 \div 10 \times \log_e 10 +$
$(0.024 - \frac{1}{2} \times 0.024^{2}$
$+ \frac{1}{3} \times 0.024^{3} - \frac{1}{4} \times 0.024^{4}$
$+ \frac{1}{5} \times 0.024^{5} \cdots) \div 10$

収束を加速するには、

$2^{196} = \underline{1.004336277\,6} \times 10^{59}$

のように —— の部分を1に近づけます。

$\log_e 10$ に近づく数列は、

$\log_{10}$	1.1	24
$\log_{10}$	1.01	231
$\log_{10}$	1.001	2303
$\log_{10}$	1.0001	23026
$\log_{10}$	1.00001	230259

ユークリッド互除法を使うことで求めることができました。