連分数を使った分析

$e = 2.718281828\,45$

$2 + (1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6,$
$1, 1, 8, 1, 1, 10 \cdots\cdots)$

$t(1)$ (P.5)

$0 + (2, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6,$
$1, 1, 8, 1, 1, 10 \cdots\cdots)$

$t(2)$ (P.6)

$0 + (2, 5, 1, 1, 9, 1, 1, 13,$
$1, 1, 17, 1, 1 \cdots\cdots)$

$t(3)$ (P.7)

$0 + (2, 8, 1, 1, 14, 1, 1, 20$
$1, 1 \cdots\cdots)$

$t(10)$ (P.8)

$0 + (2, 29, 1, 1, 49, 1, 1 \cdots\cdots)$

P.9，P.15，P.16 では、十進法を利用する係数分解法を使って数値分析をしました。ここでは連分数を使って数値分析を行います。異なる方法による分析を組み合わせることは、有益だと考えるからです。（例として、平方根を、小数と分数を使って分析すると、「研究レポート（2004.7.19）」のBとC」）

P.25の表より f(100) の場合は、

$$\underbrace{0+(2,}_{一定}\ 299,\ \underbrace{1,\ 1}_{一定},\ 499,$$

$$\begin{array}{llll} (3n-1) & 3\times 100-1 & (5n-1) & 5\times 100-1 \end{array}$$

$$1,\ 1,\ 699,\ 1,\ 1,\ 899$$

$$\begin{array}{llll} (7n-1) & 7\times 100-1 & (9n-1) & 9\times 100-1 \end{array}$$

連分数を分数に直す方法

e の場合　$2+(1, 2, 1, 1, 4 \cdots)$

eは 1より大きいので 始めに$\left[\dfrac{1}{0}\right]$とします。

	$2 + ($	$1,$	$2,$	$1,$	$1,$
	$\downarrow$	$1/1$	$1/2$	$1/1$	$1/1$
$\dfrac{1}{0}$	$\dfrac{2}{1}$	$\dfrac{3}{1}$	$\dfrac{8}{3}$	$\dfrac{11}{4}$	$\dfrac{19}{7}$
		$4,$	$1,$	$1,$	$6,$
		$1/4$	$1/1$	$1/1$	$1/6$
$\dfrac{11}{4}$	$\dfrac{19}{7}$	$\dfrac{87}{32}$	$\dfrac{106}{39}$	$\dfrac{193}{71}$	$\dfrac{1264}{465}$

$$1264 = 106 \times 1 + 193 \times 6$$

$$465 = 39 \times 1 + 71 \times 6$$

$$1264 \div 465 = 2.718279569$$

f(100)の場合

1よりも小さい数値の場合は$\left[\frac{0}{1}\right]$とします。

0 + (2 , 299 , 1 , 1 ,

↓ 1/299 1/1 1/1

$\frac{0}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{299}{599}$ $\frac{300}{601}$ $\frac{599}{1200}$

499 , 1 ,

1/499 1/1

$\frac{300}{601}$ $\frac{599}{1200}$ $\frac{299201}{599401}$ $\frac{299800}{600601}$

1 , 699 ,

1/1 1/699

$\frac{299201}{599401}$ $\frac{299800}{600601}$ $\frac{599001}{1200002}$ $\frac{419001499}{839401999}$

419001499 ÷ 839401999

= 0.49916666805555 2… (P.13)

4 (3) について

(3) $x^{\frac{1}{n}}$ の近似

始めに、3つの式を使って $\sqrt[3]{2}$ を求めます。

$$\sqrt[3]{2} = 1.259921049894873$$

① $\sqrt[3]{1+x} \sim 1+\frac{x}{3}$　　$1+\frac{1}{3} = 1.333\cdots$

② $\sqrt[3]{1+x} \sim 1+\frac{x}{3+x}$　　$1+\frac{1}{3+1} = 1.25$

③ $\sqrt[3]{x} \sim \frac{x+2\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}$　　$\frac{2+2\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}} = 1.2612\cdots$

③の式の精度が一番良いことがわかります。今日の計算機による平方根の計算は、割り算と同じ程度の手間だそうです。平方根が含まれる式ですが、有効だと思います。

①は接線(直線)による方法です。

②は反比例のグラフの曲線を使います。

ハレー法(3次収束)の方法です。

(レポート 2009.7.19 C P.27)

③の方法は高木和久さんに教えていただきました。

$$x^{\frac{1}{n}} \sim \frac{(n+3)x + 4n\sqrt{x} + (n-3)}{(n-3)x + 4n\sqrt{x} + (n+3)}$$

の式と ②の場合の

$$x^{\frac{1}{n}} \sim \frac{(n+1)x + (n-1)}{(n-1)x + (n+1)}$$

の式では、形に共通点があります。

③の方法は、P.3 の㊁の式を使って作ります。

始まりは、

$$\left(1+\frac{1}{n-0.5}\right)^n \sim e$$

の式です。

$$e^a \sim \left(1+\frac{a}{n-0.5a}\right)^n$$

$$= \left(\frac{2n+a}{2n-a}\right)^n$$ と変形します。

$a = \ln x$ とすると

$$x = e^{\ln x} \sim \left(\frac{2n + \ln x}{2n - \ln x}\right)^n$$

$$x^{\frac{1}{n}} \sim \frac{2n + \ln x}{2n - \ln x}$$

となります。

$\ln x$ に P.3 の㋓の式を代入します。

$$x^{\frac{1}{n}} \sim \frac{(n+3)x + 4n\sqrt{x} + (n-3)}{(n-3)x + 4n\sqrt{x} + (n+3)}$$

n に 3 を代入します。

$$x^{\frac{1}{3}} \sim \frac{x + 2\sqrt{x}}{1 + 2\sqrt{x}}$$

このようにして、高木さんは、P.29 の③の式を導出しました。すぐれたアイデアだと思います。

（ここまでの反省）

① P.18で「ベルヌーイ数の母関数」を教えていただきましたが、まだうまく説明できません。

② P.22で誤差の比のちがいがわかりましたが理由がわかりません。

③ P.26で $(3n-1)$, $(5n-1)$, $(7n-1)$ $(9n-1)\cdots$ となることの意味がわかりません。

④ P.3の㋒の式はPadé近似によるものです。私の学習不足で作り方の説明を書くことができません。もうしわけありません。