武田 利一 様

2015.2.1

林 卸英

あっというまに2月になってしまいました。ときの流れがはやく感じられます。

レポートの続きを書きました。もしよろしければ御感想をお知らせください。

吉田 武さんの書かれた「オイラーの贈物」（ちくま学芸文庫2001年）のP.viiには「一方、欧米の教科書は非常に具体的である。（略）彼らにとって、理解できないもの、あるいは説得力に欠けるものは、存在意義のないものである。（略）しかし、値段は驚くほど安い。」とあります。また、P.136には高木 貞治さんの「特殊から一般へ！」が紹介されています。吉田さんの考え方が良く表現されています。

P.9 の数値を使って

$$\text{十} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12n} + \frac{1}{720n^3} - \boxed{\text{第4項}}$$

第4項を求めようとしました。すると 十(100)の数値の下4桁が正しくないことがわかりました。

十(100)の ⑦ より　(P.15)

$1 \div 0.01562 = 64.02\cdots$　となり

十(1)　の ⓒ の $30996.21\cdots$　とくらべると

小さすぎることがわかります。

原因は

$$100\sqrt[100]{e} = 101.0050167084168$$

$$100\sqrt[100]{e} - 101 = 0.0050167084\,1679$$

$$\sqrt[100]{e} = 1.0100501670\,84168$$

$$\sqrt[100]{e} - 1 = 0.0100501670\,84168$$

の計算にありました。

第4項のnの次数をたしかめます。

P.5の$t(1)$とP.6の$t(2)$の数値を使います。

$$t = \frac{1}{2} - \frac{1}{12n} + \frac{1}{720n^3}$$

の式のnに1,2を代入し、$t(1)$と$t(2)$との差を求め、差の比を調べます。

$t(1)$	0.41802329313067 4
	0.41805555555555 5
差(ア)	0.00003226242488 2
$t(2)$	0.45850591746320 1
	0.45850694444444 4
差(イ)	0.00000102698124 3

(ア)÷(イ) = 31.4148… で約$32 = 2^5$

tの第4項はn^5であることがわかります。

f(10) の⑦の数値を使います。 (P.16)

1÷0.0000330597 = 30248.3・・・・

f(1) の©とくらべます。 (P.15)

f(1) ⟶ −30996.21・・・・

f(10) ⟶ −30248.3・・・

約 30000 として

1÷30000 = 0.0000333・・・・

f(100) の下4桁を修正します。

$$\begin{array}{r} 3993 \\ +\ 1562 \\ \hline 5555 \\ -\ \quad 3 \\ \hline 5552 \end{array}$$

f(100) 0.4991666680555552

第4項の係数を予想します。

$$+\frac{1}{2} \xrightarrow{\times(-6)} -\frac{1}{12} \xrightarrow{\times(-60)} +\frac{1}{720} \xrightarrow{(\times(-42))} \left(-\frac{1}{30240}\right)$$

30000より大きい720の倍数を調べました。

$720 \times 42 = 30240$

$720 \times 43 = 30960$

そこで、f(10)によって得られた数値よりも少し小さい

30240と予想しました。

f(1)を使って第5項の係数を予想しました。

1240694より小さい数値です。

$30240 \times 40 = 1209600$?

$30240 \times 41 = 1239840$?

$30240 \times 42 = 1270080$ ×

あくまでも予想です。 → P.18

t(100) の場合

①	0.49916666805 3993	t(100)
②	0.5000000000000000	1÷2
③	0.0008333319 46007	②−①
④	0.0008333333333333	1÷12÷100
⑤	0.0000000001387326	④−③
⑥	0.0000000001388888	$1÷720÷100^3$
⑦	0.00000000000001562	⑥−⑤

t(1) の場合

ⓐ $1 \div \left(t(1) - \frac{1}{2} \right) = -12.198\cdots \rightarrow -12$

ⓑ $1 \div \left(t(1) - \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \right) = 733.12\cdots \rightarrow 720$

ⓒ $1 \div \left(t(1) - \frac{1}{2} + \frac{1}{12} - \frac{1}{720} \right) = -30996.21\cdots\cdot$

f(10) の場合

①	0.491668055224957	f(10)
②	0.500000000000000	1÷2
③	0.008331944775042	②−①
④	0.008333333333333	1÷12÷10
⑤	0.000001388558291	④−③
⑥	0.000001388888888	$1÷12÷10^3$
⑦	0.000000000330597	⑥−⑤

e^a の場合は？

$e \sim \left(1+\frac{1}{n-0.5}\right)^n$ の両辺を a 乗します。

$e^a \sim \left(1+\frac{1}{n-0.5}\right)^{an}$ となります。

$N = an$ とすると　$n = \frac{N}{a}$

$$e^a \sim \left(1+\frac{1}{\frac{N}{a}-0.5}\right)^N = \left(1+\frac{a}{N-0.5a}\right)^N$$

N を n におきかえて

$$e^a \sim \left(1+\frac{a}{n-0.5a}\right)^n$$

0.5 を $\frac{1}{2}-\frac{1}{12n}+\frac{1}{720n^3}$ におきかえると

$$e^a \sim \left(1+\frac{a}{n-a\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{12n}+\frac{a^3}{720n^3}\right)}\right)^n$$

$$e^a \sim \left(1+\frac{a}{n-\frac{1}{2}a+\frac{1}{12n}a^2-\frac{1}{720n^3}a^4}\right)^n$$

となります。

南山大学の杉浦 洋 先生による説明

$n=1$ の場合が本質的であることから始まります。

$$e^a \sim 1 + \frac{a}{H(a) - a/2}, \quad H(a) = 1 + a^2/12 - a^4/720$$

これを $H(a)$ で解くと、

$$H(a) \sim \frac{a}{e^a - 1} + a/2 = \frac{a(e^a+1)}{2(e^a-1)} = \frac{a}{2\tanh(a/2)}$$

右辺は偶関数で右辺のMaclaurin展開は、

$$\frac{a}{2\tanh(a/2)} = 1 + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + \frac{x^6}{30240} - \frac{x^8}{1209600} + O(x^{10})$$

(注)には、e^a より $e^{a/n}$ の方が近似が容易であることが書かれています。

簡単な近似式でもれを大きくすれば精度がよくなります。

$$e^a = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$$ の説明です。

3 (2) について

(2) $x=1$ の近傍における $\ln x$ の近似

$$\log x \sim 2\cdot\frac{x-1}{x+1}$$

の近似式の説明から始めます。

高木和久さんの書かれた「黄金比とフィボナッチ数列を用いた対数関数の区間近似」の「3. 対数関数の近似式」を参考にしました。

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\cdot\frac{x^n}{n} + \cdots$$

$$(-1 < x \leq 1)$$

ここから始まります。

x に $-x$ を代入すると

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \cdots - \frac{x^n}{n} \cdots$$

$$\log(1+x) - \log(1-x) = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \cdots$$

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\right)$$

$$(-1 < x \leq 1)$$

x が 0 に近いとき

$$\log \frac{1+x}{1-x} \sim 2x$$

$\frac{1+x}{1-x} = t$ とすると

$$1+x = t - tx$$

$$x + tx = t - 1$$

$$x(1+t) = t - 1$$

$$x = \frac{t-1}{t+1}$$

$$\log t \sim 2 \cdot \frac{t-1}{t+1}$$

t を x におきかえて

$$\log x \sim 2 \cdot \frac{x-1}{x+1}$$ (P.3 ㋐)

$x^{\frac{1}{n}}$ の n が大きい自然数のとき、1 に近くなることを利用して、

$$\log x^{\frac{1}{n}} \sim 2 \cdot \frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{x^{\frac{1}{n}}+1}$$

$$\downarrow$$

$$\log x \sim 2n \cdot \frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{x^{\frac{1}{n}}+1} \qquad (\text{P.3 イ})$$

この変形は元になる式がちがっても使えます。

$$\ln x \sim 3 \cdot \frac{x^2-1}{x^2+4x+1} \qquad (\text{P.3 ウ})$$

$x \to \sqrt{x}$ とする

$$(3 \times 2) \cdot \frac{(\sqrt{x})^2-1}{(\sqrt{x})^2+4\sqrt{x}+1}$$

$$\ln x \sim 6 \cdot \frac{x-1}{x+1+4\sqrt{x}} \qquad (\text{P.3 エ})$$

㋐と㋒の式を元にして、近似式を作り、誤差を調べました。

$x = 2$ の時の数値を使いました。

①→⑤では、誤差の比が約4分の1

⑥→⑩では 誤差の比が約16分の1

になりました。

No. 23

Date

① $\log x \sim 2 \cdot \dfrac{x-1}{x+1}$

② $\log x \sim 4 \cdot \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

③ $\log x \sim 8 \cdot \dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[4]{x}+1}$

④ $\log x \sim 16 \cdot \dfrac{\sqrt[8]{x}-1}{\sqrt[8]{x}+1}$

⑤ $\log x \sim 32 \cdot \dfrac{\sqrt[16]{x}-1}{\sqrt[16]{x}+1}$

⑥ $\ln x \sim 3 \cdot \dfrac{x^2-1}{x^2+1+4x}$

⑦ $\ln x \sim 6 \cdot \dfrac{x-1}{x+1+4\sqrt{x}}$

⑧ $\ln x \sim 12 \cdot \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1+4\sqrt[4]{x}}$

⑨ $\ln x \sim 24 \cdot \dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[4]{x}+1+4\sqrt[8]{x}}$

⑩ $\ln x \sim 48 \cdot \dfrac{\sqrt[8]{x}-1}{\sqrt[8]{x}+1+4\sqrt[16]{x}}$

Ans − ln x

No. 24

Date

x	2	5	10
	−2.648 E−2	−0.2761	−0.6662
	−6.856 E−3	−8.157 E−2	−0.2246
	−1.729 E−3	−2.137 E−2	−6.155 E−2
	−4.333 E−4	−5.406 E−3	−1.577 E−2
	−1.084 E−4	−1.356 E−3	−3.966 E−3
	−8.395 E−4	−4.422 E−2	−0.1962
	−5.477 E−5	−3.471 E−3	−1.920 E−2
	−3.460 E−6	−2.299 E−4	−1.350 E−3
	−2.168 E−7	−1.458 E−5	−8.693 E−5
	−1.356 E−8	−9.143 E−7	−5.473 E−6