武田 利一 様

2015.1.11

林 邦英

本年もよろしくお願いします。

高知県の方よりネイピア数について興味深いことを教えていただきました。レポートにしました。もしよろしければ御感想をお知らせ下さい。

南山大学の方よりMaclaurin展開により、

$$\left\{1+\frac{1}{n-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12n}+\frac{1}{720n^3}\right)}\right\}^n \sim e$$

となることを教えていただきました。ありがとうございます。

eに収束する数列の加速

〔はじめに〕

吉田武さんの書かれた「オイラーの贈物」（ちくま学芸文庫 2001年）のP.166～P.169にネイピア数の求め方が2つ示されています。P.169には、「級数展開の方法では、7桁の分数で小数点以下7桁まで正しい値が得られた。しかし、上記の方法では、収束が全く緩慢で、8桁の分数を取っても小数点以下第一位すら正しい値になっていない。従って、数値計算をする場合、この方法が実際に用いられることはない。」とあります。

ところが、高知工業高専の高木和久さんに送っていただいた資料（2014.12.24消印）には興味深いことが書かれていました。

極限を利用する場合の「落とし穴」の実例だと思います。

1 高木和久さんの資料より

この資料には3つのことが書かれています。

(1) eに収束する数列の加速

$$\lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sim e$$

の式を少し変形して

$$\lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n-t}\right)^n = e$$

としてtを調べると、$t=\frac{1}{2}$のときに急速に収束することがわかります。

nが大きいとき、

$$\left(1+\frac{1}{n-0.5}\right)^n \sim e$$

が成り立ちます。

(2) $x=1$ の近傍における $\ln x$ の近似

高木和久さんの書かれた「黄金比とフィボナッチ数列を用いた対数関数の区間近似」の続きのように思いました。

㋐ $\log x \sim 2\cdot\dfrac{x-1}{x+1}$

㋑ $\log x \sim 2n\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{n}}-1}{x^{\frac{1}{n}}+1}\left(6\cdot\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}\right)$

㋒ $\ln x \sim \dfrac{3(x^2-1)}{x^2+4x+1}$

㋓ $\ln x \sim 6\cdot\dfrac{x-1}{x+1+4\sqrt{x}}$

㋒と㋓を新しく教えていただきました。

(3) $x^{\frac{1}{n}}$ の近似

$$x^{\frac{1}{n}} \sim \frac{(n+3)x+4n\sqrt{x}+(n-3)}{(n-3)x+4n\sqrt{x}+(n+3)}$$

$n=3$を代入すると

$$\sqrt[3]{x} \sim \frac{x+2\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}$$

となります。

$$\sqrt[3]{1+x} \sim 1+\frac{x}{3}$$

$$\sqrt[3]{1+x} \sim 1+\frac{x}{3+x}$$

の式とくらべると精度のよいことがわかります。

2 (1)について

$n=1$ のときの t の求め方

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n-t}\right)^n\right\}_{n=1,2,\cdots}$$

について調べてみました。

$$\left(1+\frac{1}{1-t}\right)^1 = e = 2.718$$

$$1+\frac{1}{1-t} = 2.718$$

$$\frac{1}{1-t} = 1.718$$

$$1 = 1.718 - 1.718t$$

$$0.718 = 1.718t$$

$$\frac{0.718}{1.718} = t = \frac{e-2}{e-1}$$

$$t(1) = 0.41802329313067 4$$

$n=2$ のとき

$$\left(1+\frac{1}{2-t}\right)^2 = e = 2.718$$

$$1+\frac{1}{2-t} = \sqrt{e} = 1.649$$

$$\frac{1}{2-t} = 0.649 = \sqrt{e}-1$$

$$1 = 2(\sqrt{e}-1) - t(\sqrt{e}-1)$$

$$t(\sqrt{e}-1) = 2(\sqrt{e}-1)-1$$

$$= 2\sqrt{e}-3$$

$$t = \frac{2\sqrt{e}-3}{\sqrt{e}-1}$$

$$t(2) = 0.45850591746320 1$$

$n=3$ のとき

$$\left(1+\frac{1}{3-t}\right)^3 = e = 2.718$$

$$1+\frac{1}{3-t} = \sqrt[3]{e} = 1.396$$

$$\frac{1}{3-t} = 0.396 = \sqrt[3]{e}-1$$

$$1 = 3(\sqrt[3]{e}-1) - t(\sqrt[3]{e}-1)$$

$$1 = 3\sqrt[3]{e}-3 - t(\sqrt[3]{e}-1)$$

$$t(\sqrt[3]{e}-1) = 3\sqrt[3]{e} - 3 - 1$$

$$= 3\sqrt[3]{e} - 4$$

$$t = \frac{3\sqrt[3]{e}-4}{\sqrt[3]{e}-1}$$

$$t(3) = 0.472273526842871$$

一般の場合のtは

$n=1$ $\quad \dfrac{e-2}{e-1}$

$n=2$ $\quad \dfrac{2\sqrt{e}-3}{\sqrt{e}-1}$

$n=3$ $\quad \dfrac{3\sqrt[3]{e}-4}{\sqrt[3]{e}-1}$

一般化すると

$$\frac{n\sqrt[n]{e}-(n+1)}{\sqrt[n]{e}-1}$$

$n=10$ のときは

$$\frac{10\sqrt[10]{e}-11}{\sqrt[10]{e}-1}$$

$$t(10) = 0.491668055224957$$

$n=100$ のときは

$$\frac{100\sqrt[100]{e}-101}{\sqrt[100]{e}-1}$$

$$t(100) = 0.499166668053993$$

t(1) と t(10) と t(100) の数値を使って

t(1)	0.418023293130674
t(10)	0.491668055224957
t(100)	0.499166668053993

$$\frac{1}{2} \quad - \frac{1}{12n} \quad + \frac{1}{720n^3}$$

十進法を利用する係数分解法を使いました。

改良した式

$$e \sim \left\{ 1 + \frac{1}{n - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12n} + \frac{1}{720n^3} \right)} \right\}^n$$

$n=5$ のとき	Ans − e
$t=0$	−0.22996
$t=\frac{1}{2}$	0.00913
$t=\frac{1}{2}-\frac{1}{12n}+\frac{1}{720n^3}$	5.766 e−9

まとめ

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n$$

の式は 40年以上前から知っていましたが、高木さんに教えていただくまで、[$n-t$] と変化させて t を調べることは、思いもしませんでした。貴重な資料を送っていただきありがとうございます。

iPhone の計算機を使って計算しました。