武田 利一 様

2014.7.6

林 邦英

三角関数の級数展開がどのように研究されてきたのかについて、少し考えてみました。cosとsinの式の決定までをレポートにしてみました。未完成のものです。もうしわけありません。

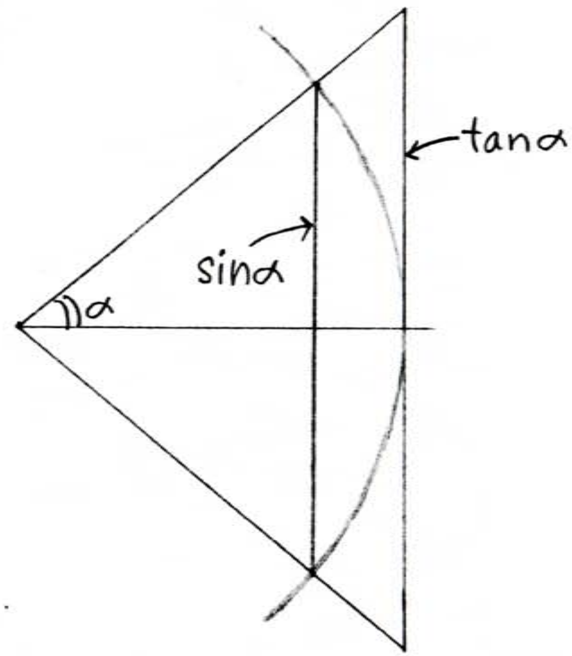
次の課題は、π の級数展開(効率的な計算方法)の決定です。「π の歴史 ペートル・ベックマン著」(ちくま学芸文庫)の第12章より第14章が対応します。P.221では、arctanを使った式、P.233では、arcsinを使った式が紹介されています。気になっています。微積分の形成過程で、無限級数の研究が大きな役割をもったと思うからです。

暑い日が続きます。お体に気をつけてください。

コクヨ ケ-35 20×20

三角関数の級数展開について

始まりは、円周率を求めるアルキメデスさんの方法の改良にあったと思います。
内接正多角形の辺と外接正多角形の辺と円弧の観察です。




上部半分に着目するとsinとtanになります。



sinαとtanαの比重を変えて平均します。

(sinα + tanα) ÷ 2 =

(2・sinα + tanα) ÷ 3 =

(3・sinα + tanα) ÷ 4 =

(2・sinα + tanα) ÷ 3 とすると、円弧αの数値に近づくことが確かめられます。
今日では、マクローリン展開によって簡単に説明することができますが、長い間、説明のできないふしぎな経験則だったと思います。
この事実がいつごろ発見されたかは知りませんが簡単に確かめることができるので、私は始まりと考えます。

第2段階は、角度を変化させた時に tan と円弧の差がどのように変化するのかを確かめる観察です。
角度を半分にすると差が約8分の1になる事実の発見です。
第3段階は、cosの数値を使った実験です。
角度は、1.5°, 0.75°, 0.375°を使いました。
1との差を調べると、角度が半分になった時、差は約4分の1になりました。
$8=2^3$ ではなく $4=2^2$ です。

| cos | tan | sin |
| --- | --- | --- |
| $1-\square^2$ | 円弧 $+\square^3$ | 円弧 $-\frac{\square^3}{2}$ |

□を円弧で表わせるのではないかと思いついたきっかけだったと思います。



$$\cos\alpha \fallingdotseq 1-\frac{(円弧\alpha)^2}{2}$$

この式から、多くの発見が続きます。
cosの角度を半分にした時の1との差の比は4よりも少し小さい数値なので、4を割って1に近い数値に補正すると、1.4という平方数があらわれました。第3項のが見えてきました。

$$\cos\alpha \fallingdotseq 1-\frac{(円弧\alpha)^2}{2}+\frac{(円弧\alpha)^4}{\square}$$

の式を予想します。
〔+〕にしたのは、角度を半分にした時の1との差の比が4より少し小さいからです。
〔4〕にしたのは、2乗の2乗で4乗だからです。

$$\cos\alpha \fallingdotseq 1 - \frac{(\text{円弧}\alpha)^2}{2} + \frac{(\text{円弧}\alpha)^4}{24}$$

の式を決定することができました。

tan，sinの場合は、もっと精度の良い数値を必要としました。

tanの場合は、8よりも少し大きく、平方数があらわれました。

sinの場合は、8よりも少し小さく、8を割って補正することで平方数の比があらわれました。

cosと同様の実験をすることで

$$\sin\alpha \fallingdotseq (\text{円弧}\alpha) - \frac{(\text{円弧}\alpha)^3}{6} + \frac{(\text{円弧}\alpha)^5}{120}$$

$$\tan\alpha \fallingdotseq (\text{円弧}\alpha) + \frac{(\text{円弧}\alpha)^3}{3} + \frac{2(\text{円弧}\alpha)^5}{15}$$

の式を作ることができます。



式を簡単にするために、円弧を利用した角度を使ってあらわすことにします。

$$\cos x \fallingdotseq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

$$\sin x \fallingdotseq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

$$\tan x \fallingdotseq x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}$$

cosとsinの式を組み合わせて観察します。

cos

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| xの次数 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |
| 係数 | | 2 | 24 | $\boxed{\phantom{00}}$ | $\boxed{\phantom{00}}$ |

sin

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| xの次数 | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| 係数 | 1 | 6 | 120 | $\boxed{\phantom{00}}$ | $\boxed{\phantom{00}}$ |

xの次数はすぐにわかります。

係数は、比をとって調べます。

$1 = 1$

$2 = 1 \times 2$

$6 = 1 \times 2 \times 3$

$24 = 1 \times 2 \times 3 \times 4$

$120 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \square \frac{x^6}{6!} \square \frac{x^8}{8!}$$

を予想できます。〔+〕か〔−〕かは、すでにわかっている数値を使って確かめたと思います。

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} -$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} -$$

このようにして、cosとsinの式は決定されたと思います。



tanについてはよくわかりません。arctanの方が先に研究されたのは、式の決定がtanよりもたやすかったからだと思います。

今日では、三角関数の級数展開は、微積分によって説明されます。微積分の発明される以前にどのようにして先人たちが研究してきたのか大変に興味があります。「工夫」の宝箱だと思うからです。

級数展開という発想法は、平方根の研究から生まれたのではないかと思います。理由は、答があっているのかまちがっているのかを確かめるのが簡単だからです。

まだまだ学習不足です。思いちがいがあるかもしれません。もしよろしければ、もっと良い説明方法をお知らせ下さい。