武田 利一 様

2014.5.5

林 邦英

P.28～P.34の説明を書きました。テーマは、「三角関数の級数展開を利用する以前の三角比の表の作り方についての4つの段階」です。

愛知県の方より円周率の数値の決定法についての質問がありましたので、P.36の表を作りました。私の考え方で、実際の数値計算で問題となるのは、tanよりcosを求める時の開平計算なので、P.37～P.38で、実例を示しました。「2の12乗根の求め方」（2008.12.11）レポートで使った方法を利用しました。簡単な方法です。

山崎川の新緑を楽しんでいます。5月の風は、3年前を思い出させます。

P.12の数値を使って

$K1 - \pi = 0.000000014577284$

$\pi - K2 = 0.000000001619581$

$14577284 \div 1619581 \fallingdotseq 9.0006514$

$(K1 + K2 \times 9) \div 10 =$

$\underline{3.14159265358989}899$

P.14の数値を使って

$\{\sin 1^\circ + (\tan 1^\circ - \sin 1^\circ) \div 3\} \times 180 =$

$\underline{3.1415926}6816716$

角度を変えて調べてみます。

CASIO FX-890P を使いました。

$(\sin x + (\tan x - \sin x) \div 3) \times 180 \div x$

x	
60°	3.464101615
45°	3.218951417
30°	3.154700538
15°	3.142349131
7.5°	3.141639056
3°	3.141593835
1.5°	3.141592727
1°	3.141592668
0.75°	3.141592658
0.375°	3.141592654
π	3.141592654

P.30 の $\tan 1.5°$ の数値を使って

$\cos 1.5°$ を求める計算

$$1+\tan^2 1.5° = \frac{1}{\cos^2 1.5°}$$

の式を使います。

$\tan 1.5° = 0.0261859214$ — A

$1+A^2 = 1.00068570247$ — B

$1 \div B = 0.99931476739$ — C

$1-C = 0.00068523261$ — D

$D \div 2 = 0.0003426163$ — E

$1-E = 0.9996573837$ — F

$F \times F = 0.99931488478$ — G

$G \div C = 1.00000011747$ — H

H の小数部分を 2 で割ります。

1.00000005873 — I

$F \div I = 0.9996573 2499$ — J

$J \times J = 0.9993147674$ — K

K が C とほとんど同じになったので

$\cos 1.5° = J$ とします。

$\cos 1.5° = 0.99965732499$

P.28 〜 P.34 の説明

1973年にG. Toomerさんによって復元された「ヒッパルコスの弦の表」は、7.5°ごとの表で補間をするのに弦を円弧で近似します。

円周率の数値は、 3;8,30 を使います。

$3 + 8/60 + 30/3600 = 3.1416666\cdots\cdots$

正三角形, 正四角形 の分析によって得られた

0°, 30°, 45°, 60°, 90° の数値を使います。

P.28 の方法 に対応します。

疑問その1

$45° - 30° = 15°$ なのになぜ 7.5° なのか。

$$\frac{\sin\alpha \pm \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \tan\frac{\alpha+\beta}{2}$$

の元になる式は

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + 1} = \tan\frac{\alpha}{2}$$

だと思います。

	sin	cos	tan
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

$\tan 30° \div \sin 60° =$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} \longrightarrow \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \cos 60° + 1$$

疑問その2

P.36の表 の x が 7.5° の時の数値は、3.141666‥‥ にとても近いのはなぜか。

P.11 の K1の式を知っていたのではないかと思われます。

P.29〜P.30では、正五角形を分析することで得られた数値を利用し、1.5°ごとの表を作る場合を示しました。

円弧を利用して sin 0.5° を近似しました。

〔PDF〕PDF(456KB)で紹介されている

プトレマイオスさんの不等式

$$\frac{2}{3}\sin 1.5^\circ \leqq \sin 1^\circ \leqq \frac{4}{3}\sin 0.75^\circ$$

よりも精度が良くなります。

P.31〜P.32では精度を良くするために

$\pi \div 720 \fallingdotseq \sin 0.25^\circ$ を使いました。

0.75° に対応する π の値を P.36で調べると

3.14159265 8

で大変精度も良いものです。

$$\frac{355}{113} = 3.14159292035$$

P.33〜P.34のテーマは「効率的な計算方法を求めて」です。三角関数の級数展開による方法の入り口にあたるものだと考えています。

P.31では tan 0.375° を求めました。

0.75° の数値より簡単に求めることができます。

分母に 1 を加えるだけです。

円弧と tan の差が、角度が変化した時にどのように変化するのか。

	角度は	差は
1.5°		
0.75°	÷2	÷8
0.375°	÷2	÷8

「インド数学研究」のP.168に紹介されていました。sinの場合の式です。

〔あとがき〕

1月に始めた 2012.4.9「三角比の表の観察」のレポートの書き直しのなかで、三角関数の級数展開の考え方が、三角比の表作りの中から生まれてきたことを確かめることができました。

南山大学の杉浦 洋さん、北海道の渡辺 勝さん、埼玉県の武田 利一さんを始め多くの方の協力があってここまで書くことができました。

ありがとうございます。

2014.5.5