

武田 利一 様

2014. 1. 28

林 邦英

三角比の表の観察には2つの視点があることがわかりました。1つは、表を観察して、 $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\tan$ の関係をみちびきだすことです。もう1つは、数表それ自体の性質を知ることです。この2つを知ることによって、数表を有効活用できました。

昨年は、三平方の定理をグラフ用紙を使って考えてみました。数値が出てきました。今回の三角比の表の観察でも数値にこだわりました。

私は普通科と工業科のちがいを知らないのので、教育現場でどのような工夫がなされているのか知りたいと思っております。もしよろしければお知らせ下さい。

まだまだ不十分なレポートです。もうしわけありません。

## 三角比の表の観察

(はじめに)

A が  $1^\circ$  と  $2^\circ$  の数値を使います。

$$0.0175 \times 180 = 3.15 \quad \text{--- ㊦}$$

$$0.0349 \times 90 = 3.141$$

変だなと思いました。

理由はこの表の性質にありました。

アルキメデスさんの円周率についての考え方を確かめるためにこの表にある数値を使います。

$$1 \div 57.2900 \times 180 \quad 0.9998 \div 57.2900 \times 180$$

$$3.1419 > \pi > 3.14127$$

$$\pi = 3.141\dots\dots$$

であることがわかります。

㊦ 3.15 となってしまう理由はなぜでしょう。

## 三角比の表の観察 (その1)

A	$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$
$0^\circ$	0.0000	1.0000	0.0000
$30^\circ$	0.5000		
$45^\circ$	0.7071	0.7071	1.0000
$60^\circ$		0.5000	
$90^\circ$	1.0000	0.0000	---

$$\textcircled{1} \sin A \quad 0^\circ \rightarrow 90^\circ$$

$$\cos A \quad 90^\circ \rightarrow 0^\circ$$

は同じ数値がなっています。

$$\sin A = \cos(90^\circ - A)$$

$$\cos A = \sin(90^\circ - A)$$

②  $A = 45^\circ$  のとき

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = 0.7071 \quad \tan 45^\circ = 1.0000$$

なので  $\sin$  と  $\cos$  の比が  $\tan$  であることがわかります。

$A = 0^\circ$  のとき

$$\sin 0^\circ = 0.0000 \quad \cos 0^\circ = 1.0000$$

$$\tan 0^\circ = 0.0000$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

なので  
であることがわかります。

③ ①と②の式を使って

$$\begin{aligned} \tan(90^\circ - A) &= \frac{\sin(90^\circ - A)}{\cos(90^\circ - A)} \\ &= \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{1}{\tan A} \end{aligned}$$

$$\tan A = \frac{1}{\tan(90^\circ - A)}$$

③ を表で確かめます。数表の行間を調べます。

{	$\tan 5^\circ$	0.0875	$\tan 85^\circ$	11.4301
		0.1000		10.0000
	$\tan 6^\circ$	0.1051	$\tan 84^\circ$	9.5144

$$1 \div 10.0000 = 0.1000$$

$$\tan 11^\circ \quad 0.1944 \quad \tan 79^\circ \quad 5.1446$$

$$0.2000 \quad 5.0000$$

$$\tan 12^\circ \quad 0.2126 \quad \tan 78^\circ \quad 4.7046$$

$$1 \div 5.0000 = 0.2000$$

$$1 \div 11.4301 = 0.0874882$$

$$1 \div 9.5144 = 0.1051038$$

$$1 \div 5.1446 = 0.1943785$$

$$1 \div 4.7046 = 0.2125579$$

} ①

$\tan 1^\circ$  の精度を良くする

①の数値を使います。

$$0.0874882 \longrightarrow 0.0875$$

$$0.1051038 \longrightarrow 0.1051$$

$$0.1943785 \longrightarrow 0.1944$$

$$0.2125579 \longrightarrow 0.2126$$

数表の数値と同じになりました。

$\tan 1^\circ$  と  $\tan 89^\circ$  の数値を使います。

$$\tan 1^\circ = 0.0175 \begin{cases} 0.01754 \\ 0.01745 \end{cases}$$

$$\tan 89^\circ = 57.2900 \begin{cases} 57.29004 \\ 57.28995 \end{cases}$$

$$0.01754 \div 0.01745 = 1.0051575$$

$$57.29004 \div 57.28995 = 1.0000015$$

$\tan 1^\circ$  を  $\tan 89^\circ$  の数値を使って求める理由は

ここにあります。

$$\tan A = \frac{1}{\tan(90^\circ - A)}$$

の式を使います。

$$\begin{aligned} \tan 1^\circ &= \frac{1}{\tan 89^\circ} = 1 \div 57.2900 \\ &= 0.0174550 \rightarrow 0.0175 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan 2^\circ &= \frac{1}{\tan 88^\circ} = 1 \div 28.6363 \\ &= 0.0349207 \rightarrow 0.0349 \end{aligned}$$

表の数値を再現することができました。

(電卓を使う上での工夫)

$$100 \div 57.29 = 1.7455053$$

とすることで2桁多く求めることができます。

$$\tan 1^\circ \approx 0.017455053$$

$\tan 81.5^\circ$ を求める

2つの方法をくらべてみて下さい。

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \tan 81^\circ \quad 6.3138 \\ \quad \tan 82^\circ \quad 7.1154 \end{array} \quad \text{平均して } 6.7146$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} & \left( \frac{1}{\tan 81^\circ} + \frac{1}{\tan 82^\circ} \right) \div 2 \\ & = 0.1494617 \end{aligned}$$

$$1 \div 0.1494617 = 6.6906772$$

{参考値}

$$\tan 81.5^\circ = 6.691156238317403$$

同じ数値を使っても②の方法の方が精度が良くなります。①の方法は真数より大きくなり、②の方法は真数より小さくなります。これは、 $\tan$ のグラフの形を調べることでわかります。⇒ P.13

三角比の表の観察 (その2)

$$A = 45^\circ$$

$$\sin 45^\circ = 0.7071$$

$$\cos 45^\circ = 0.7071$$

$$A = 30^\circ$$

$$\sin 30^\circ = 0.5000$$

$$\cos 30^\circ = 0.8660$$

$$A = 0^\circ$$

$$\sin 0^\circ = 0.0000$$

$$\cos 0^\circ = 1.0000$$

$$A = 60^\circ$$

$$\sin 60^\circ = 0.8660$$

$$\cos 60^\circ = 0.5000$$

$$A = 90^\circ$$

$$\sin 90^\circ = 1.0000$$

$$\cos 90^\circ = 0.0000$$

$\sin A$  と  $\cos A$  の関係は?

π の近似値を求める

$\tan 1^\circ$  の精度を良くします。

$$\tan A = \frac{1}{\tan(90^\circ - A)}$$

$\tan 89^\circ = 57.2900$  を使います。

$$\begin{aligned}\tan 1^\circ &= 1 \div 57.2900 \\ &= 0.017455053\end{aligned}$$

$\sin 1^\circ$  の精度を良くします。

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \Rightarrow \sin A = \tan A \cdot \cos A$$

$$\begin{aligned}\sin 1^\circ &= \tan 1^\circ \times \cos 1^\circ \\ &= 0.017455053 \times 0.9998 \\ &= 0.017451561\end{aligned}$$

(  $1.7455053 \times 0.9998$  として  
百円ショップの8桁電卓で計算しました。 )

$\cos 1^\circ$  の精度を良くします。

$\cos 1^\circ = \sqrt{1 - (\sin 1^\circ)^2}$  を使います。

$$\begin{aligned}\sqrt{1 - 0.0174516^2} \\ &= 0.9998477\end{aligned}$$

再度  $\sin 1^\circ$  の精度を良くします。

$$\begin{aligned}0.017455053 \times 0.9998477 \\ &= 0.017452394\end{aligned}$$

$$\sin 1^\circ = 0.017452394$$

$$\cos 1^\circ = 0.9998477$$

$$\tan 1^\circ = 0.017455053$$

の数値を使います。

アキメデスさんの方法の確認

$$0.017455053 \times 180 =$$

$$3.1419095 \quad - \textcircled{L}$$

$$0.017452394 \times 180 =$$

$$3.1414309 \quad - \textcircled{Q}$$

$$\textcircled{L} > \pi = 3.141\dots > \textcircled{Q}$$

$\textcircled{L}$  と  $\textcircled{Q}$  の数値を使います。

$$(\textcircled{L} + \textcircled{Q}) \div 2 = 3.1416702$$

$$(\textcircled{L} + \textcircled{Q} \times 2) \div 3 = 3.1415904$$

$$(\textcircled{L} + \textcircled{Q} \times 3) \div 4 = 3.1415505$$

$$\{\tan 1^\circ + (\sin 1^\circ) \times 2\} \times 60 \quad - K_1$$

とすることで  $\pi$  の数値が良くなりました。

$$\pi \doteq \frac{3 \cdot \sin 1^\circ}{2 + \cos 1^\circ} \times 180 \quad - K_2$$

を使います。

$$\frac{3 \times 0.017452394}{2 + 0.9998477} \times 180$$

$$= 3.1415904$$

$K_1$  と  $K_2$  のちがいはわかりません。

⇒ P.14

iPhone の計算機で確かめました。

$$K_1 = 3.1415926 \ 68167077$$

$$\pi = 3.1415926 \ 53589793$$

$$K_2 = 3.1415926 \ 51970212$$

$$K_1 > \pi > K_2$$

で  $K_1$  より  $K_2$  の方が精度が良い

ことがわかります。

tan A

80°	5.6713	0.6425	
81°	6.3138	0.8016	0.1591
82°	7.1154	1.0289	0.2273
83°	8.1443		
7°	0.1228	0.0177	
8°	0.1405	0.0179	0.0002
9°	0.1584	0.0179	0.0000
10°	0.1763		
7°	0.1227852	0.0177550	
8°	0.1405402	0.0178430	
9°	0.1583832	0.0179432	
10°	0.1763264		

iPhone の数値とくらべると

sin 1°

0.017452394

0.017452406437284

cos 1°

0.9998477

0.999847695156391

tan 1°

0.017455053

0.017455064928218

原因は

①②③④⑤⑥

tan 89° = 57.2900 を使ったことに  
あります。



$\tan 89^\circ$  の数値を使って

$\cos 1^\circ$  の数値の精度を良くする

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

の式より  $\sin A$  をなくすために

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

の式を使います。

全体を 2 乗します。

$$\tan^2 A = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$1 = \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A}$$

$$1 + \tan^2 A = \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos^2 A}$$

$$1 + \tan^2 A = \frac{1}{\cos^2 A}$$

$$\tan 89^\circ = 57.2900$$

$$\tan 1^\circ = 1 \div 57.2900$$

$$= 0.0174550$$

百円ショップの 8 桁電卓を使います。

$$0.0174550 \times = 0.0003046$$

$$+ 1 = 1.0003046$$

$$\div = 0.9996959$$

$$\sqrt{\quad} = 0.9998476$$

$$\cos 1^\circ = 0.9998476$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \Rightarrow \sin A = \tan A \cdot \cos A$$

$$0.0174550 \times 0.9998476$$

$$= 0.0174523$$

$$\sin 1^\circ = 0.0174523$$