

武田 利一様

2019.1.26

林 邦英

武田さん用にと思い作ってみました。内容は少し手を加えました。まだまだ不十分なものです。もうしわけありません。

手を加えていただけたらと願っています。

三角比の表の観察

(はじめに)

A が 1° と 2° の数値を使います。

$$0.0175 \times 180 = 3.15 \quad \text{--- (ア)}$$

$$0.0349 \times 90 = 3.141$$

変だなと思いました。

理由はこの表の性質にありました。

アルキメデスさんの円周率についての考え方を確かめるためにこの表にある数値を使います。

$$1 \div 57.2900 \times 180 \quad 0.9998 \div 57.2900 \times 180$$

$$3.1419 > \pi > 3.14127$$

$$\pi = 3.141\dots$$

であることがわかります。

(ア) 3.15 となってしまう理由は何でしょう。

三角比の表の観察 (その1)

A	$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$
0°	0.0000	1.0000	0.0000
30°	0.5000		
45°	0.7071	0.7071	1.0000
60°		0.5000	
90°	1.0000	0.0000	---

$$\textcircled{1} \sin A \quad 0^\circ \rightarrow 90^\circ$$

$$\cos A \quad 90^\circ \rightarrow 0^\circ$$

は同じ数値がなっています。

$$\sin A = \cos(90^\circ - A)$$

$$\cos A = \sin(90^\circ - A)$$

② $A = 45^\circ$ のとき

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = 0.7071 \quad \tan 45^\circ = 1.0000$$

なので \sin と \cos の比が \tan であることがわかります。

$A = 0^\circ$ のとき

$$\sin 0^\circ = 0.0000 \quad \cos 0^\circ = 1.0000$$

$$\tan 0^\circ = 0.0000$$

$$\text{なので} \quad \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

であることがわかります。

③ ①と②の式を使って

$$\begin{aligned} \tan(90^\circ - A) &= \frac{\sin(90^\circ - A)}{\cos(90^\circ - A)} \\ &= \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{1}{\tan A} \end{aligned}$$

$$\tan A = \frac{1}{\tan(90^\circ - A)}$$

③ を表で確かめます。数表の行間を調べます。

$$\left[\begin{array}{ll} \tan 5^\circ & 0.0875 \quad \tan 85^\circ & 11.4301 \\ & 0.1000 & 10.0000 \\ \tan 6^\circ & 0.1051 \quad \tan 84^\circ & 9.5144 \end{array} \right.$$

$$1 \div 10.0000 = 0.1000$$

$$\tan 11^\circ \quad 0.1944 \quad \tan 79^\circ \quad 5.1446$$

$$0.2000 \quad 5.0000$$

$$\tan 12^\circ \quad 0.2126 \quad \tan 78^\circ \quad 4.7046$$

$$1 \div 5.0000 = 0.2000$$

$$1 \div 11.4301 = 0.0874882$$

$$1 \div 9.5144 = 0.1051038$$

$$1 \div 5.1446 = 0.1943785$$

$$1 \div 4.7046 = 0.2125579$$

①

$\tan 1^\circ$ の精度を良くする

①の数値を使います。

$$0.0874882 \longrightarrow 0.0875$$

$$0.1051038 \longrightarrow 0.1051$$

$$0.1943785 \longrightarrow 0.1944$$

$$0.2125579 \longrightarrow 0.2126$$

数表の数値と同じになりました。

$\tan 1^\circ$ と $\tan 89^\circ$ の数値を使います。

$$\tan 1^\circ = 0.0175 \begin{cases} 0.01754 \\ 0.01745 \end{cases}$$

$$\tan 89^\circ = 57.2900 \begin{cases} 57.29004 \\ 57.28995 \end{cases}$$

$$0.01754 \div 0.01745 = 1.0051575$$

$$57.29004 \div 57.28995 = 1.0000015$$

$\tan 1^\circ$ を $\tan 89^\circ$ の数値を使って求める理由は

ここにあります。

$$\tan A = \frac{1}{\tan(90^\circ - A)}$$

の式を使います。

$$\begin{aligned} \tan 1^\circ &= \frac{1}{\tan 89^\circ} = 1 \div 57.2900 \\ &= 0.0174550 \rightarrow 0.0175 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan 2^\circ &= \frac{1}{\tan 88^\circ} = 1 \div 28.6363 \\ &= 0.0349207 \rightarrow 0.0349 \end{aligned}$$

表の数値を再現することができました。

(電卓を使う上での工夫)

$$100 \div 57.29 = 1.7455053$$

とすることで2桁多く求めることができます。

$$\tan 1^\circ \approx 0.017455053$$

$\tan 81.5^\circ$ を求める

2つの方法をくらべてみて下さい。

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \tan 81^\circ \quad 6.3138 \\ \tan 82^\circ \quad 7.1154 \end{array} \quad \text{平均して } 6.7146$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \left(\frac{1}{\tan 81^\circ} + \frac{1}{\tan 82^\circ} \right) \div 2 \\ = 0.1494617 \end{aligned}$$

$$1 \div 0.1494617 = 6.6906772$$

{参考値}

$$\tan 81.5^\circ = 6.691156238317403$$

同じ数値を使っても②の方法の方が精度が良くなります。①の方法は真数より大きくなり、②の方法は真数より小さくなります。これは、 \tan のグラフの形を調べることでわかります。 \Rightarrow P.13

三角比の表の観察 (その2)

$$A = 45^\circ$$

$$\sin 45^\circ = 0.7071$$

$$\cos 45^\circ = 0.7071$$

$$A = 30^\circ$$

$$\sin 30^\circ = 0.5000$$

$$\cos 30^\circ = 0.8660$$

$$A = 0^\circ$$

$$\sin 0^\circ = 0.0000$$

$$\cos 0^\circ = 1.0000$$

$$A = 60^\circ$$

$$\sin 60^\circ = 0.8660$$

$$\cos 60^\circ = 0.5000$$

$$A = 90^\circ$$

$$\sin 90^\circ = 1.0000$$

$$\cos 90^\circ = 0.0000$$

$\sin A$ と $\cos A$ の関係は?

πの近似値を求める

$\tan 1^\circ$ の精度を良くします。

$$\tan A = \frac{1}{\tan(90^\circ - A)}$$

$\tan 89^\circ = 57.2900$ を使います。

$$\begin{aligned}\tan 1^\circ &= 1 \div 57.2900 \\ &= 0.017455053\end{aligned}$$

$\sin 1^\circ$ の精度を良くします。

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \Leftrightarrow \sin A = \tan A \cdot \cos A$$

$$\begin{aligned}\sin 1^\circ &= \tan 1^\circ \times \cos 1^\circ \\ &= 0.017455053 \times 0.9998 \\ &= 0.017451561\end{aligned}$$

(1.7455053×0.9998 として
百円ショップの8桁電卓で計算しました。)

$\cos 1^\circ$ の精度を良くします。

$\cos 1^\circ = \sqrt{1 - (\sin 1^\circ)^2}$ を使います。

$$\begin{aligned}\sqrt{1 - 0.0174516^2} \\ &= 0.9998477\end{aligned}$$

再度 $\sin 1^\circ$ の精度を良くします。

$$\begin{aligned}0.017455053 \times 0.9998477 \\ &= 0.017452394\end{aligned}$$

$$\sin 1^\circ = 0.017452394$$

$$\cos 1^\circ = 0.9998477$$

$$\tan 1^\circ = 0.017455053$$

の数値を使います。

三角比の表

A	sin A	cos A	tan A	A	sin A	cos A	tan A
0°	0.0000	1.0000	0.0000	45°	0.7071	0.7071	1.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.0355
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.1918
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0.7771	0.6293	1.2349
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	0.7880	0.6157	1.2799
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.3270
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.3764
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.4281
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.4826
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.5399
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.6003
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.6643
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8748	0.4848	1.8040
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.8807
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.9626
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.0503
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.1445
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.2460
22°	0.3748	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.3559
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.4751
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.6051
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.7475
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.9042
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.0777
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.2709
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.4874
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2588	3.7321
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.0108
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.3315
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.7048
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.1446
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.6713
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.3138
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.1154
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.1443
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.5144
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.4301
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.3007
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	18.0811
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	26.6363
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	67.2800
45°	0.7071	0.7071	1.0000	90°	1.0000	0.0000	—

アキメデスさんの方法の確認

$$0.017455053 \times 180 =$$

$$3.1419095 \quad - \textcircled{L}$$

$$0.017452394 \times 180 =$$

$$3.1414309 \quad - \textcircled{Q}$$

$$\textcircled{L} > \pi = 3.141\dots > \textcircled{Q}$$

\textcircled{L} と \textcircled{Q} の数値を使います。

$$(\textcircled{L} + \textcircled{Q}) \div 2 = 3.1416702$$

$$(\textcircled{L} + \textcircled{Q} \times 2) \div 3 = 3.1415904$$

$$(\textcircled{L} + \textcircled{Q} \times 3) \div 4 = 3.1415505$$

$$\{\tan 1^\circ + (\sin 1^\circ) \times 2\} \times 60 \quad - K_1$$

とすることで π の数値が良くなりました。

$$\pi \doteq \frac{3 \cdot \sin 1^\circ}{2 + \cos 1^\circ} \times 180 \quad - K_2$$

を使います。

$$\frac{3 \times 0.017452394}{2 + 0.9998477} \times 180$$

$$= 3.1415904$$

K_1 と K_2 のちがいはわかりません。

\Rightarrow P.14

iPhoneの計算機で確かめました。

$$K_1 = 3.1415926 \quad 68167077$$

$$\pi = 3.1415926 \quad 53589793$$

$$K_2 = 3.1415926 \quad 51970212$$

$$K_1 > \pi > K_2$$

で K_1 より K_2 の方が精度が良い

ことがわかります。

tan A

80°	5.6713	0.6425	
81°	6.3138	0.8016	0.1591
82°	7.1154	1.0289	0.2273
83°	8.1443		
7°	0.1228		
8°	0.1405	0.0177	0.0002
9°	0.1584	0.0179	0.0000
10°	0.1763	0.0179	
7°	0.1227852		
8°	0.1405402	0.0177550	
9°	0.1583832	0.0178430	
10°	0.1763264	0.0179432	

iPhone の数値とくらべると

sin 1°

0.017452399

0.017452406437284

cos 1°

0.9998477

0.999847695156391

tan 1°

0.017455053

0.017455064928218

原因は

①②③④⑤⑥

tan 89° = 57.2900 を使ったこと
にあります。