

武田 利一 様

2014.1.14

林 邦英

本年もよろしくお願ひします。

寒い日が続きます。お体には気をつけて下さい。

三角比の表の観察のレポートを書き直しました。

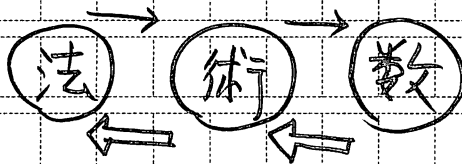
アルキメデスさんの円周率についての考へ考へ方を確かめるために、三角比の表を使った場合、 $2^\circ$  よりも  $1^\circ$  の方が円周率の精度が良くなければなりません。この表の場合、 $2^\circ$  の方が良くなります。なぜか？ここから始めることにしました。

釧路商業高校の杉本 拓也さんの「三角比の表から導入する授業」のレポートには興味深いことが書かれています。この学校では、毎年、電卓大会が行なわれます。電卓を使った数値計算で数値に対してのセンスがきたえられているのだなと思いました。

私のかよ、た定時制高校には普通科と商業科がありました。学年をおうごとに、商業科の方が成績が良くなると数学の先生が言われたことを思い出しました。

レポートの数値は、百円ショップの8桁電卓とiPhoneの計算機を使いました。

森本 先生さんの「逆三角関数に関する建部賢弘の三つの公式」の『9 建部賢弘の「綴術」』の部分は何度読んでも気にかかります。



### 三角比の表の観察

[はじめに]

A が 1° と 2° の数値を使います。

$$0.0175 \times 180 = 3.15 \quad \text{--- ㉑}$$

$$0.0349 \times 90 = 3.141$$

変だなと思いました。

理由はこの表の性質にあります。

アルキメデスさんの円周率についての考え方を確かめるのに、この表にある数値を使います。

$$1 \div 57.2900 \times 180 \quad 0.9998 \div 57.2900 \times 180$$

$$3.1419 > \pi > 3.14127$$

$$\pi = 3.141 \dots$$

であることがわかります。

㉑ 3.15 となってしまう理由は何ですか？

㉒ A = 45° のとき

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ \quad \tan 45^\circ = 1$$

なので sin と cos の比が tan であることがわかる。

A = 0° のとき

$$\sin 0^\circ = 0.0000 \quad \cos 0^\circ = 1.0000$$

$$\tan 0^\circ = 0.0000$$

なので

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

であることがわかる。

㉓ ㉑ と ㉒ の式を使って

$$\tan(90^\circ - A) = \frac{\sin(90^\circ - A)}{\cos(90^\circ - A)}$$

$$= \frac{\cos A}{\sin A}$$

$$= \frac{1}{\tan A}$$

### 三角比の表の観察 (その1)

A	sin A	cos A	tan A
0°	0.0000	1.0000	0.0000
30°	0.5000		
45°	0.7071	0.7071	1.0000
60°		0.5000	
90°	1.0000	0.0000	---

㉔ sin A 0° → 90°

cos A 90° → 0°

は同じ数値がなんでいる。

$$\sin A = \cos(90^\circ - A)$$

$$\cos A = \sin(90^\circ - A)$$

㉕ を表で確かめます。数表の行間を調べます。

tan 5°	0.0875	tan 85°	11.4301
	0.1000		10.0000
tan 6°	0.1051	tan 84°	9.5144

$$1 \div 10.0000 = 0.1000$$

tan 11°	0.1944	tan 79°	5.1446
	0.2000		5.0000

$$1 \div 5.0000 = 0.2000$$

tan 12°	0.2126	tan 78°	4.7046

$$1 \div 4.7046 = 0.2125579$$

$$1 \div 11.4301 = 0.0874882$$

$$1 \div 9.5144 = 0.1051038$$

$$1 \div 5.1446 = 0.1943785$$

$$1 \div 4.7046 = 0.2125579$$

㉖

5

$\tan 1^\circ$  の精度を良くする。

①の数值を使います。

$$0.0874882 \rightarrow 0.0875$$

$$0.1051038 \rightarrow 0.1051$$

$$0.1943785 \rightarrow 0.1944$$

$$0.2125579 \rightarrow 0.2126$$

数表の数值と同じになりました。

$\tan 1^\circ$  と  $\tan 89^\circ$  の数值を使います。

$$\tan 1^\circ = 0.0175 \begin{cases} 0.01754 \\ 0.01745 \end{cases}$$

$$\tan 89^\circ = 57.2900 \begin{cases} 57.29004 \\ 57.28995 \end{cases}$$

$$0.01754 \div 0.01745 = 1.0051575$$

$$57.29004 \div 57.28995 = 1.0000015$$

$\tan 1^\circ$  を  $\tan 89^\circ$  の数值を使って求める理由は

ここにあります。

6

$$\tan A = \frac{1}{\tan(90^\circ - A)}$$

の式を使います。

$$\begin{aligned} \tan 1^\circ &= \frac{1}{\tan 89^\circ} = 1 \div 57.2900 \\ &= 0.0174550 \rightarrow 0.0175 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan 2^\circ &= \frac{1}{\tan 88^\circ} = 1 \div 28.6363 \\ &= 0.0349207 \rightarrow 0.0349 \end{aligned}$$

表の数值を再現することができました。

(電卓を使うとこの工夫)

$$100 \div 57.29 = 1.7455053$$

とすると必ず2桁多く求めることができます。

$$\tan 1^\circ \approx 0.017455053$$

7

$\tan 81.5^\circ$  を求める。

3つの方法をくらべてみて下さい。

$$\textcircled{1} \quad \begin{array}{ll} \tan 81^\circ & 6.3138 \\ \tan 82^\circ & 7.1154 \end{array} \quad \text{平均して } 6.7146$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{array}{ll} \sin 81^\circ & 0.9877 \\ \sin 82^\circ & 0.9903 \end{array} \quad \text{平均して } 0.9890$$

$$\begin{array}{ll} \cos 81^\circ & 0.1564 \\ \cos 82^\circ & 0.1392 \end{array} \quad \text{平均して } 0.1478$$

$$\tan 81.5^\circ \approx \frac{0.9890}{0.1478} = 6.6914749$$

$$\textcircled{3} \quad \left( \frac{1}{\tan 81^\circ} + \frac{1}{\tan 82^\circ} \right) \div 2$$

$$= 0.1494617 \quad \textcircled{a}$$

$$\textcircled{a} \div = 6.6906772$$

[参考値]

$$\tan 81.5^\circ = 6.691156238317403$$

8

三角比の表の観察 (その2)

$$A = 45^\circ$$

$$\sin 45^\circ = 0.7071$$

$$\cos 45^\circ = 0.7071$$

$$A = 30^\circ$$

$$\sin 30^\circ = 0.5000$$

$$\cos 30^\circ = 0.8660$$

$$A = 0^\circ$$

$$\sin 0^\circ = 0.0000$$

$$\cos 0^\circ = 1.0000$$

$$A = 60^\circ$$

$$\sin 60^\circ = 0.8660$$

$$\cos 60^\circ = 0.5000$$

$$A = 90^\circ$$

$$\sin 90^\circ = 1.0000$$

$$\cos 90^\circ = 0.0000$$

$\sin A$  と  $\cos A$  の関係は?

$\pi$  の近似値を求める。

$\tan 1^\circ$  の精度を良くする。

$$\tan A = \frac{1}{\tan(90^\circ - A)}$$

$\tan 89^\circ = 57.2900$  を使います。

$$\tan 1^\circ = 1 \div 57.2900$$

$$= 0.017455053$$

$\sin 1^\circ$  の精度を良くします。

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \Rightarrow \sin A = \tan A \cdot \cos A$$

$$\sin 1^\circ = \tan 1^\circ \times \cos 1^\circ$$

$$\approx 0.017455053 \times 0.9998$$

$$\approx 0.017451561$$

( $1.7455053 \times 0.9998$  として  
百元シフトの8桁電卓で計算しました。)

$\cos 1^\circ$  の精度を良くする。

$$\cos 1^\circ = \sqrt{1 - (\sin 1^\circ)^2} \text{ を使います。}$$

$$\sqrt{1 - 0.0174515^2}$$

$$= 0.9998477$$

再度  $\sin 1^\circ$  の精度を良くします。

$$0.017455053 \times 0.9998477$$

$$= 0.017452394$$

$$\sin 1^\circ = 0.017452394$$

$$\cos 1^\circ = 0.9998477$$

$$\tan 1^\circ = 0.017455053$$

の数値を使います。

アキメデスの方法

$$0.017455053 \times 180 =$$

$$3.1419095 \quad \text{--- (L)}$$

$$0.017452394 \times 180 =$$

$$3.1414309 \quad \text{--- (Q)}$$

(L) と (Q) の数値を使います。

$$((L) + (Q)) \div 2 =$$

$$3.1416702$$

$$((L) + (Q) \times 2) \div 3 =$$

$$3.1415904$$

$$((L) + (Q) \times 3) \div 4 =$$

$$3.1415505$$

$$\{\tan 1^\circ + (\sin 1^\circ) \times 2\} \times 60 \quad \text{--- } K_2$$

とすることで  $\pi$  の数値が良くなります。

$$\pi \approx \frac{3 \cdot \sin 1^\circ}{2 + \cos 1^\circ} \times 180 \quad \text{--- } K_2$$

を使います。

$$\frac{3 \times 0.017452394}{2 + 0.9998477} \times 180$$

$$= 3.1415904$$

ちがいはわかりません。

iPhone の計算機で確かめました。

$$K_1 = 3.141592668167077$$

$$\pi = 3.141592653589793$$

$$K_2 = 3.141592651970212$$

$$K_1 > \pi > K_2$$

で  $K_1$  より  $K_2$  の方が精度が良い

ことがわかります。

## 三角比の表

A	sin A	cos A	tan A	A	sin A	cos A	tan A
0°	0.0000	1.0000	0.0000	45°	0.7071	0.7071	1.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.0355
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.1918
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0.7771	0.6293	1.2349
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	0.7880	0.6157	1.2799
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.3270
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.3764
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.4281
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.4826
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.5399
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.6003
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.6643
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.8040
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.8807
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.9626
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.0503
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.1445
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.2460
22°	0.3748	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.3559
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.4751
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.6051
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.7475
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.9042
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.0777
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.2709
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.4874
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2588	3.7321
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.0108
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.3315
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.7046
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.1446
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.6713
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.3138
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.1154
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.1443
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.5144
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.4301
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.3007
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.0811
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	28.6363
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	90°	1.0000	0.0000	—