武田 利一 様

2013.7.6

林 邦英

インターネットを使って、九州と北海道の高校を調べていて、教育を考える上で大切なことを行っている学校があることを知りました。出身中学校へ出向き、中学校の生徒さんに、高校生が教えに行くという活動です。

次の時代を創る若者の「可能性」を信じます。

福岡県の大川市が、「数学日本一」をめざして独自のこころみをしています。地方自治体の独自の工夫には、関心をもちます。なぜなら、「民主主義の学校」だからです。

豊明市の広報（2013.7.1）には、「市長だより」の中で、「豊明市のいいとこ再発見・創造」に関する所で「ボランティア精神旺盛な市民がたくさんいる」とあります。とても大切な市民の財産だと思います。

M乗数の数列の和の第2章について、少し書き直しました。

一般化する上では、素数まで分解すべきだと思うのですが、M乗数の数列の和をテーマとする上では、この方がよいかと思ったからです。

定時制高校の化学の先生と、プラスチックの再活用の話をしていて、私が、もやせば、エネルギーがえられるといったら、それはらんぼうでもったいないと言われたことを思い出しました。ここでテーマとなったのは、化合物の再利用でした。

P.6の方法は、化学分析に関する本を読んでいて思いつきました。

つゆもあけ、あつくなります。

お体には気をつけて下さい。

平方数の数列の和の公式 について

北海道の吉田泰介さんの「和の公式へのアプローチ」を参考にしました。「数学のいずみ」で見ることができました。ありがとうございます。

② ① 和の比較から ― 比を用いる

「この方法は和を考えるのだから、和から推定する自然な発想ではないだろうか。」

平方数の数列の和の公式を求めるために、自然数の場合と比較して、比を利用して求める方法を示しています。この方法は、きわめて基本的で、すぐれた方法だと思いました。③では、立方数の数列の和の公式を同様の方法で求めています。

「私的数学塾」の「数列の和」の「自然数の立方の和」のところで「私自身高校時代に不思議に思った事実である。」とあり、多くの方が体験されたことだと考えることができそうです。

自然数の数列の和の公式では、「ガウスさんの話」が有名です。

N=1よりN=100までの和は、

$$
\begin{array}{r}
1+2+3+\cdots\cdots+98+99+100 \\
+\ 100+99+98+\cdots\cdots+3+2+1 \\
\hline
101+101+101+\cdots\cdots+101+101+101
\end{array}
$$

$101\times100\div2=10100\div2=5050$

一般化すると 1よりNまでの和は

$$(1+N)\times N\div2=\frac{1}{2}\cdot N\cdot(N+1)$$

立方数の場合は、

N	自然数	和	立方数	和
1	1	1	1	$1=1^2$
2	2	3	8	$9=3^2$
3	3	6	27	$36=6^2$
4	4	10	64	$100=10^2$
5	5	15	125	$225=15^2$

立方数の数列の和の公式は、自然数の数列の和の公式の〔二乗〕になることがわかります。

$$\left\{\frac{1}{2}\cdot N\cdot(N+1)\right\}^2=\frac{1}{4}\cdot N^2\cdot(N+1)^2$$

平方数の数列の和の場合について確かめます。

N	自然数	和①	平方数	和②	②÷①	×3
1	1	1	1	1	1	1
2	2	3	4	5	5/3	5
3	3	6	9	14	7/3	7
4	4	10	16	30	3	9
5	5	15	25	55	11/3	11
6	6	21	36	91	13/3	13
7	7	28	49	140	5	15
8	8	36	64	204	17/3	17
9	9	45	81	285	19/3	19
10	10	55	100	385	21	21

×3の下の数字を調べます。

N	1	2	3	4	5	6	7
(×3)	1	5	7	9	11	13	15

↓ ↓

$5=2\times2+1$ $11=5\times2+1$

Nを使って表わすと

$2N+1$ となります。

3倍するとこうなるので

$$\frac{1}{3}\cdot(2N+1)$$

これを使って

$$\frac{1}{2}\cdot N\cdot(N+1)\times\frac{1}{3}\cdot(2N+1)$$

$$=\frac{1}{6}\cdot N\cdot(N+1)\cdot(2N+1)$$

このようにして、平方数の数列の和の公式を求めています。(Simple is Best.)

私の「第2章　素数を利用する要素分析法」よりも簡単です。

「私的数学塾」の「数列の和」では、

Johann Faulhaber (1580〜1635) さんの「Academia Algebra (1631)」をとりあげています。

GA1さんからの問題提起（平成24年1月29日）があります。

$S(k) = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k$ について

k：奇数の場合 → $S(k)$は$S(1)$の多項式で表わされる。

k：偶数の場合 → $S(k)$は$S(2)$で割れ、その商は、また、$S(r)$の多項式で表わされる。

Kが奇数と偶数の場合においての ちがいを N=1より N=10までの数列の和を素因数分解した表を作って確かめてみました。

数表1と数表2を比較します。

$11 \rightarrow N+1$　　Nを10とすると $10+1=11$

はよく対応しています。

Mが 2, 4, 6
Mが 3, 5
ちがいがあらわれています。

$7 \rightarrow 2N+1$　を予想できます。

$\left(\frac{21}{3}\right)$　$7 \times 3 = 21$　$21 = 10 \times 2 + 1$

$5 \rightarrow N$　を予想できます。

$\left(\frac{10}{2}\right)$　$5 \times 2 = 10$　$10 = 10 \times 1$

数表 1

M乗数の数列の和（N=1より N=10）の数値の素因数分解の表

M=1	55	5×11
M=2	385	5×7×11
M=3	3025	5×5×11×11
M=4	25333	7×7×11×47
M=5	220825	5×5×11×11×73
M=6	1978405	5×11×13×2767
M=7	18080425	5×5×11×11×43×139
M=8	167731333	7×11×17×97×1321
M=9	1574304985	5×11×11×109×23873

数表 2

M=1

$$\frac{1}{2} \cdot N \cdot (N+1)$$

M=2

$$\frac{1}{6} \cdot N \cdot (N+1) \cdot (2N+1)$$

M=3

$$\frac{1}{4} \cdot N^2 \cdot (N+1)^2$$

M=4

$$\frac{1}{30} \cdot N \cdot (N+1) \cdot (2N+1) \cdot (3N^2+3N-1)$$

M=5

$$\frac{1}{12} \cdot N^2 \cdot (N+1)^2 \cdot (2N+2N-1)$$

M=6

$$\frac{1}{42} \cdot N \cdot (N+1) \cdot (2N+1) \cdot (3N^4+6N^3-3N+1)$$

これより推定できることは、
Mが偶数の時は、M=2で割る。
Mが奇数の時は　M=3で割る。
こうすることで吉田さんの $\boxed{2}$ ①の方法を使うことができるのではないかということです。
規則性を推定することで、とりあつかう数値を小さくすることができます。
実用としての数学という視点に立つ時、大切な考え方だと思います。

4乗数を2乗数で割った表を作りました。

	×5
$1 \div 1 = 1$	5
$17 \div 5 = 3.4$	17
$98 \div 14 = 7$	35
$354 \div 30 = 11.8$	59
$979 \div 55 = 17.8$	89
$2275 \div 91 = 25$	125
$4676 \div 140 = 33.4$	167
$8772 \div 204 = 43$	215
$15333 \div 285 = 53.8$	269
$25333 \div 385 = 65.8$	329

求める数列の次数は、3つ少なくなっています。

平方数の数列の和の公式を求める方法には、十進法を利用する係数分解法もあります。

$1^2 \to 10^2$ の和

385

$1^2 \to 100^2$ の和

338350

$1^2 \to 1000^2$ の和

333833500

この数値より、

$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$

を読みとるためには、

$\frac{1}{N}$

の循環節の研究が役に立ちました。

小学校の算数で、小数と分数を学びますがとても基本的なテーマだと思います。

吉田 泰介さんは「和の公式へのアプローチ」の論文の $\boxed{4}$ のところで

「べきの三角数」

をとりあげています。
パスカルの三角数を少し変形したもので、k乗数の数列の和の公式を求めるために使っています。関心をもちました。

$1,$
$1,\ 1_2$
$1,\ 3_2\ 2_3$
$1,\ 7_2\ 12_3\ 6_4$
$1,\ 15_2\ 50_3\ 60_4\ 24_5$
$1,\ 31_2\ 180_3\ 390_4\ 360_5\ 120_6$

($7 \times 2 + 12 \times 3 = 50$ のように計算します。)