武田　利一　様

2012.7.5

林　邦英

　M乗数の表にN^0を加え、NをN′としました。mod81についてのレポートを書きました。mod2^nとmod3^nの場合について、N^aを割ったあまりの種類の数と、あまりの構造について説明してみました。

　P.1－P.2については、P.5－P.8で説明することができます。

　P.3－P.4は、mod2^nの場合でN^aのaがすべて偶数の場合のパターンです。基本型Aとします。P.5－P.8は、N^aのaを素因数に分解すると、3以外には、2を1つだけ含むパターンです。基本型Bとします。

　5以上の素数のM乗数をmodとする場合は、変則型となります。P.11－P.12に例を示しました。

　P.10はP.9で得た経験則を利用したものです。N^4（mod125）の場合を示しま

したが、N^{20}（$20=4\times5$）の場合のあまりを求めることができます。mod343の場合では、N^{6}の場合、$7n+1$（$0\leqq n<49$）になり、N^{42}の場合では、$49n+1$（$0\leqq n<7$）となります。

$343=7^3$　$7-1=6$

$6\times7^2=294$

$\left(\begin{array}{ll} 294\div6=49 & \text{あまりの種類の数} \\ 343\div49=7 & \text{あまりの階差}\quad N^{6} \end{array}\right.$

$\left(\begin{array}{ll} 294\div42=7 & \text{あまりの種類の数} \\ 343\div7=49 & \text{あまりの階差}\quad N^{42} \end{array}\right.$

M乗数の表の観察より、たくさんのことを知ることができます。もしよろしければ、数学の歴史の中で、どのように研究されてきたのか教えてください。

今回、あまりの構造を問題にしたのには、理由があります。「ナノカーボンの科学」（BLUE BACKS）を書かれた篠原久典さんに、経験則と構造決定という視点を教えていただきました。2000年9月に名古屋

市科学館で行なわれた勉強会の場で知った考え方です。数学に応用したところ、亀井　喜久男さんより「帰納法」だと教えていただきました。「文学史上より見たる日本の数学」（岩波文庫　三上　義夫著）のP.89－P.92の部分が気になります。「和算家の使用した推理の仕方には帰納的のものがはなはだ多い。」この文から始まります。数学教育では、この点についてどのように考えられているのか、もしよろしければ教えてください。

愛知県の方より「手紙は何度も読みましたが、私にはその価値がよくわかりません。」という内容の手紙をいただきました。10年以上、数学の学習を続けてきましたが、正直なところ、悩みっぱなしです。二宮　市三さんのように、「効率的な数値計算」と言えればよいのですが、私にはまだできません。

平成16年7月以降、私の数学レポートの発表の場を与えていただきありがとうございます。生きる支えをいただきました。

（追記）武田より

数学の世界

- 想像の世界
  - まったくの空想
  - 現実の技術と結びつくもの
  - 目標が明確な感じのもの

  ⟺ （未知のもの）
  その分野を研究してない人には理解できない　《林さんのやってること》

  未知のものや認定されてないものをとりこむ作業《武田など》

- 自然界の解析のため（微積分）
- 仕事の一部に利用（統計）
- 生活のため（読み書きソロバン）

  数学教育が扱う ⟺ （既知のもの）
  学校で習うので、勉強している人はわかる（文科省認定）　《多くの教員》

数学教員が「ロー」ならば、林さんは「アウトロー」で、私は「ボーダーロー」である。
学会や研究誌しか発表の場がなかった時代は「ローの時代」だが、ホームページがある現在は、私たちも発表できる「自由な時代」である。
楽しく発表し続けましょう。（気をつけることは「他人をおとしめることだけは、ダメ」）

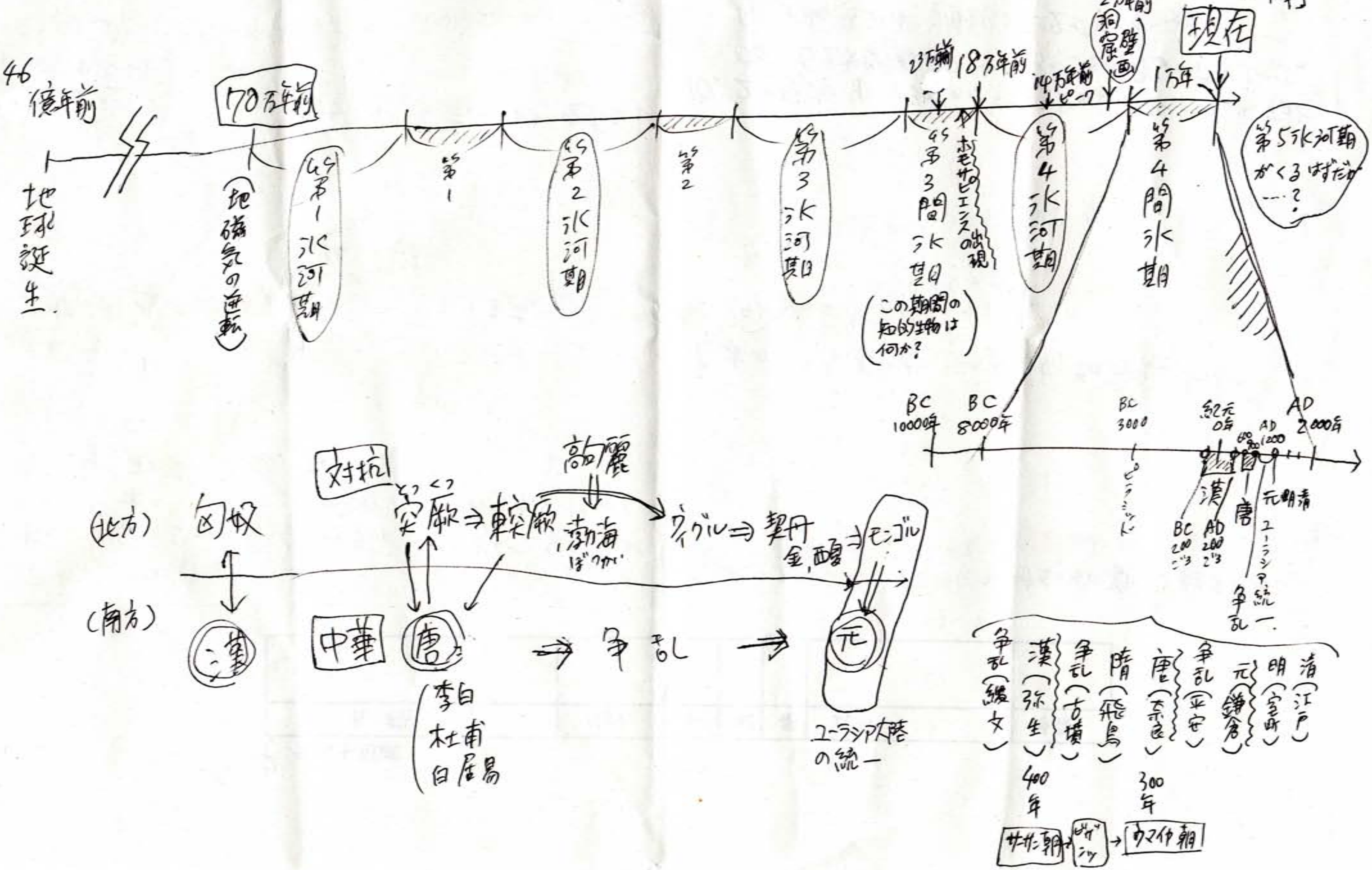
(もう一つ追記)武田より。

2012.7.6

杉山正明(京大大学院教授、60才)の「中国の歴史8―疾駆する草原の征服者」を読んでいる今のメモ(タケダ)

(講談社)

→「今やっていることを楽しい気分でやり続けることが大事」



1

mod 81 について

N^9 を27で割ったときのあまりの種類は、

1と26の2種類で加えると27になります。

N^6を27で割ったときのあまりの種類は、

1と10と19の3種類になります。

あまりの種類の数の規則性を調べるために、

N^9を81で割ったあまりを求めました。

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
あまり	1	26	0	28	53	0	55	80	0	$N^9 \pmod{81}$

$N^{18} \pmod{81}$			$N^{27} \pmod{81}$		
1^2	→	1	1^3	→	1
26^2	→	28	26^3	→	80
28^2	→	55	28^3	→	1
53^2	→	55	53^3	→	80
55^2	→	28	55^3	→	1
80^2	→	1	80^3	→	80

2

整理すると

$81 = 3^4$　$3-1=2$　$2\times 3^3 = 54$

$N^{54} \equiv 1 \pmod{81}$ 割り切れないとき

$54 \div 27 = 2$

$N^{27} \pmod{81}$ のときのあまりは2種類

$54 \div 18 = 3$

$N^{18} \pmod{81}$ のときのあまりは3種類

$54 \div 9 = 6$

$N^9 \pmod{81}$ のときのあまりは6種類

N^{27}の場合　$1 + 80 = 81$

N^{18}の場合　$1 = 27\times 0 + 1$

$28 = 27 \times 1 + 1$

$55 = 27 \times 2 + 1$

N^9の場合

$\left.\begin{matrix}26\\28\end{matrix}\right\} \to 27$　$\left.\begin{matrix}53\\55\end{matrix}\right\} \to 54 = 27\times 2$　$\left.\begin{matrix}80\\82(1)\end{matrix}\right\} \to 81 = 27\times 3$

3

$N^2, N^4, N^8, N^{16}, N^{32}$ (Nは奇数)を128

で割ったときにあらわれるあまりの構造

N^2　N^4　N^8　N^{16}　N^{32}

25, 89 → 113

57, 121 → 49

113, 49 → 97

41, 105 → 17

9, 73 → 81

17, 81 → 33

97, 33 → 65 → 1

N^8 (4種類　$4=32\div 8$)　1, 33, 65, 97

N^{16} (2種類　$2=32\div 16$)　1, 65

N^{32} (1種類　$1=32\div 32$)　1

4

N^2 (16種類　$16=32\div 2$)

$0\times 8+1 = 1$

$1\times 8+1 = 9$

$2\times 8+1 = 17$

$3\times 8+1 = 25$

$4\times 8+1 = 33$

$5\times 8+1 = 41$

$6\times 8+1 = 49$

$7\times 8+1 = 57$

$8\times 8+1 = 65$

$9\times 8+1 = 73$

$10\times 8+1 = 81$

$11\times 8+1 = 89$

$12\times 8+1 = 97$

$13\times 8+1 = 105$

$14\times 8+1 = 113$

$15\times 8+1 = 121$

N^4 (8種類　$8=32\div 4$)

$0\times 16+1 = 1$

$1\times 16+1 = 17$

$2\times 16+1 = 33$

$3\times 16+1 = 49$

$4\times 16+1 = 65$

$5\times 16+1 = 81$

$6\times 16+1 = 97$

$7\times 16+1 = 113$

$N^9, N^{18}, N^{27}, N^{54}, N^{81}$ を243で割ったときにあらわれるあまりの構造

$243 = 3^5$　$3-1=2$　$2\times 3^4 = 162$

N^9		N^{18}	N^{27}	N^{54}	N^{81}
1	161	1	1	1	1
26	163	28	80	82	242
28	188	55	82	163	(2)
53	190	82	161	(3)	
55	215	109	163		
80	217	136	242		
82	242	163	(6)		
107	(18)	190			
109		217			
134		(9)			
136					

N^9 (mod 243)

$\left.\begin{matrix}242\\ 1\ (244)\end{matrix}\right\} \to 243 = 27\times 9$

$\left.\begin{matrix}26\\ 28\end{matrix}\right\} \to 27 = 27\times 1$

$\left.\begin{matrix}53\\ 55\end{matrix}\right\} \to 54 = 27\times 2$

$\left.\begin{matrix}80\\ 82\end{matrix}\right\} \to 81 = 27\times 3$

$\left.\begin{matrix}107\\ 109\end{matrix}\right\} \to 108 = 27\times 4$

$\left.\begin{matrix}134\\ 136\end{matrix}\right\} \to 135 = 27\times 5$

$\left.\begin{matrix}161\\ 163\end{matrix}\right\} \to 162 = 27\times 6$

$\left.\begin{matrix}188\\ 190\end{matrix}\right\} \to 189 = 27\times 7$

$\left.\begin{matrix}215\\ 217\end{matrix}\right\} \to 216 = 27\times 8$

N^{27} (mod 243)

$\left.\begin{matrix}242\\ 1\ (244)\end{matrix}\right\} \to 243 = 81\times 3$

$\left.\begin{matrix}80\\ 82\end{matrix}\right\} \to 81 = 81\times 1$

$\left.\begin{matrix}161\\ 163\end{matrix}\right\} \to 162 = 81\times 2$

N^{81} (mod 243)

$\left.\begin{matrix}242\\ 1\ (244)\end{matrix}\right\} \to 243 = 243\times 1$

N^{18} (mod 243) は N^9 (mod 243) より生まれる。

$\left.\begin{matrix}242\\ 1\end{matrix}\right\} \to 1$

$\left.\begin{matrix}26\\ 28\end{matrix}\right\} \to 28$

$\left.\begin{matrix}53\\ 55\end{matrix}\right\} \to 53$

対となる数字の下の数字によって作られる。

N^{54} (mod 243) は N^{27} (mod 243) より生まれる。

$\left.\begin{matrix}243\\ 1\end{matrix}\right\} \to 1$

$\left.\begin{matrix}80\\ 82\end{matrix}\right\} \to 81$

$\left.\begin{matrix}161\\ 163\end{matrix}\right\} \to 163$

N^6を243で割ったあまりは？

N^{54}は　$1 = 81\times0+1$

$54=2\times3^3$　$82 = 81\times1+1$

$163 = 81\times2+1$

N^{18}は　$1 = 27\times0+1$

$18=2\times3^2$　$28 = 27\times1+1$

$55 = 27\times2+1$

N^6 (mod 243) の場合

$6=2\times3$　$162\div6=27$ (あまりの種類)

$243\div27=9$ (あまりの階差)

$1 = 9\times0+1$　　$9n+1$

$10 = 9\times1+1$　$(0\leqq n<27)$

$19 = 9\times2+1$

$28 = 9\times3+1$

$37 = 9\times4+1$

N^4 (mod 125) のあまりは？

N	1	2	3	…	62	63	…	122	123	124
あまり	1	16	81	…	86	86	…	81	16	1

回文構造

$125=5^3$　$5-1=4$　$4\times5^2=100$

$N^{100}\equiv1$ (mod 125) 割り切れないとき

$100\div4=25$ (あまりの種類)

$125\div25=5$ (あまりの階差)

$1 = 5\times0+1$　　$5n+1$

$6 = 5\times1+1$　$(0\leqq n<25)$

$11 = 5\times2+1$

$16 = 5\times3+1$

$21 = 5\times4+1$

$26 = 5\times5+1$

N^5 (mod 125) のあまりは？

N	1	2	3	4	…	12	13	…	21	22	23	24
あまり	1	32	118	24	…	82	43	…	101	7	93	124

補数構造

$125=5^3$　$5-1=4$　$4\times5^2=100$

$100\div5=20$ (あまりの種類)

1 − $125=25\times5$ − 124

+6　7　　　118　−6

18　　　107　+6

−6　24　　　101

25　　　$100=25\times4$

26　　　99

+6　32　　　93　−6

−6　43　　　82　+6

49　　　76

$50=25\times2$　　　$75=25\times3$

51　　　74

+6　57　　　68　−6

N^7 (mod 343) のあまりは？

342	116	226
1	117	227
18	128	244
19	129	246
30	146	263
31	148	264
48	165	275
50	166	276
67	177	293
68	178	295
79	195	312
80	197	313
97	214	324
99	215	325

(42)

M乗数の表

N^0	N^1	N^2	N^3	N^4	N^5	N^6	N^7	N^8	N^9
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
1	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
1	5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
1	6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
1	7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
1	8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728
1	9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489
1	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000